В. З. Гребенкин, Р. П. Заднепровский, В. А. Летягин

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ СПО

Под редакцией **В. З. Гребенкина, Р. П. Заднепровского**

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника и практикума для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 621(075.32)
ББК 30.12я723
Г79

***Авторы*:**

Заднепровский Рэм Петрович — доктор технических наук, профессор, член редакционной коллегии Инновационного центра развития образования и науки;

Гребенкин Владимир Захарович — доктор технических наук, профессор кафедры «Техническая механика» факультета интеллектуальных технических систем Национального исследовательского университета «МИЭТ», профессор кафедры «Основы конструирования машин» Института энергомашиностроения и механики Национального исследовательского университета «МЭИ»;

Летягин Валерий Афанасьевич — кандидат технических наук, доцент кафедры «Техническая механика» факультета интеллектуальных технических систем Национального исследовательского университета «МИЭТ».

***Рецензенты*:**

Погалов А. И. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Техническая механика» Национального исследовательского университета «МИЭТ»;

Пындак В. И. — доктор технических наук, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры «Механика» Волгоградского государственного аграрного университета.

Гребенкин, В. З.

Г79 Техническая механика : учебник и практикум для СПО / В. З. Гребенкин, Р. П. Заднепровский, В. А. Летягин ; под ред. В. З. Гребенкина, Р. П. Заднепровского. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 390 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-10337-3

В учебнике дано краткое изложение курса «Техническая механика», который, являясь фундаментом специальных инженерно-технических дисциплин, дает логическую связь анализа взаимодействия тел с вопросами прочностного расчета и проектирования конкретных механизмов и их деталей.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, может быть полезным преподавателям и инженерно-техническим работникам.

УДК 621(075.32)
ББК 30.12я723

Delphi Law Company

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

© Гребенкин В. З., Заднепровский Р. П., Летягин В. А., 2015
© ООО «Издательство Юрайт», 2019

ISBN 978-5-534-10337-3

Оглавление

Предисловие

Авторы предлагают компактный курс технической механики, для немеханических специальностей вузов, включающий разделы: Теоретическая механика (раздел 1), Теория механизмов и машин (раздел 2), Сопротивление материалов (раздел 3) и Детали машин (раздел 4).

Издание такого учебника вызвано, как считают авторы, рядом обстоятельств:

• новые издания по ТехМ для немеханических специальностей вузов отсутствуют, а старые издания не соответствуют новым требованиям и практически не сохранены в должном объеме и качестве внешнего вида для использования в учебном процессе;

• издание предлагаемого учебного пособия по ТехМ вызвано еще и тем, как полагают его авторы, что в курсе ТехМ необходимо учитывать положения ФГОС СПО, существенно отличающиеся от предшествующих образовательных стандартов и в первую очередь процентным соотношением самостоятельной работы студентов к аудиторной работе и др.

Предлагаемая книга «Техническая механика» нацелена на цельное восприятие всего цикла общеинженерной подготовки немеханических специальностей. Раздел теоретической механики построен на дифференциальной форме известного из школьного курса закона Ньютона так, что статика является частным случаем, четко вытекающим из этого закона. То есть, фактически, курс начинается с общих положений динамики, уравнения которой наиболее универсальны и дают математическую связь между силовыми и кинематическими параметрами движения системы тел.

Исходя из современных представлений о динамическом состоянии окружающей нас среды и относительности любого движения, студентам следует твердо усвоить, что нет ничего абсолютно неподвижного и, например, кажущийся нам неподвижным камень движется вместе с нашей планетой и сам объем камня изменяется (хотя и незначительно) в соответствии с температурой и давлением окружающей среды. Поэтому, когда говорят о статическом состоянии, прежде всего, следует обратить внимание на масштаб изменения этого состояния (например, величины температурного удлинения тел по сравнению с его размерами). Уровень допустимого изменения является краеугольным камнем инженерного подхода к решению важнейших практических задач. Это наглядно видно из сопоставления сложившегося курса теоретической механики (ТМ) и, например, курса «Сопротивление материалов» (СМ).

В обоих случаях мы имеем дело с механическими системами и в основе этих курсов лежат законы Галилея — Ньютона. Однако если в курсе ТМ микроперемещениями (деформациями тел), как правило, пренебрегают, то при расчете тел на прочность микродеформациями пренебречь невозможно и, более того, их учет (на основе закона Гука) — непременное условие инженерного расчета, составляющего основу курса СМ. В определенном смысле, выделение отдельного курса СМ является условностью. Раздел теории машин и механизмов (ТММ), по существу, является специальным прикладным курсом ТМ, где более детально рассматриваются приемы и методы определения силовых и кинематических параметров типовых механизмов и проектирования схем машин с заданными траекториями и кинематическими и силовыми характеристиками их рабочих органов.

Таким образом, рассматриваемый курс механики, являясь фундаментом специальных инженерно-технических дисциплин, дает логическую связь анализа взаимодействия тел с вопросами прочностного расчета и проектирования конкретных механизмов и их деталей.

Содержание данного краткого курса теоретической механики соответствует ФГОС СПО.

Авторы благодарят профессора Юрия Геннадиевича Лапынина за оказание ценных советов методического характера по сопротивлению материалов и выражают глубокую признательность рецензенту профессору Виктору Ивановичу Пындаку, ценные советы и замечания которого учтены при окончательном редактировании книги.

В результате изучения данного учебника студент должен освоить:

трудовые действия

• владения методами проведения комплексного технико-экономического анализа для обоснованного принятия решений, изыскания возможности сокращения цикла работ, содействия подготовке процесса их реализации с обеспечением необходимых технических данных в машиностроительном производстве;

• методами построения математических моделей типовых задач механики;

• навыками разработки и оформления эскизов деталей машин, изображения сборочных единиц, сборочного чертежа изделия, составлять спецификацию;

• основными методами анализа воздействующих силовых факторов, анализа внутренних силовых факторов;

• основными приемами составления расчетной модели при различных видах механического нагружения;

• навыками проведения проектных и проверочных расчетов на прочность, жесткость, устойчивость, выносливость;

• навыками проектирования и конструирования передаточных механизмов в соответствии с техническим заданием;

• навыками использования методов теоретической механики, теории машин и механизмов, сопротивления материалов, деталей машин и основ конструирования при решении практических задач;

• методами теоретического и экспериментального исследования в механике;

необходимые умения

• выполнять работы в области научно-технической деятельности по проектированию, информационному обслуживанию, организации производства, труда и управлению, метрологическому обеспечению, техническому контролю в машиностроительном производстве;

• решать типовые задачи по основным разделам механики, используя методы математического анализа, использовать физические законы при анализе и решении проблем;

• применять действующие стандарты, технические регламенты, положения и инструкции по оформлению технической документации;

• применять методы анализа и синтеза исполнительных механизмов;

• применять методы расчета и конструирования деталей и узлов механизмов;

• проводить расчеты деталей машин по критериям работоспособности и надежности;

необходимые знания

• принципов использования природных ресурсов, энергии и материалов;

• основных физических положений и законов, необходимых при изготовлении машиностроительной продукции;

• методических, нормативных и руководящих материалов, касающихся выполняемой работы; принципов работы, технических характеристик, конструктивных особенностей разрабатываемых и используемых технических средств;

• методов исследований и условий выполнения работ;

• основных понятий, законы и модели механики;

• основ проектирования технических объектов;

• основных видов механизмов, методов исследования и расчета их кинематических и динамических характеристик;

• методов расчета на прочность, жесткость, устойчивость типовых элементов различных конструкций.

Раздел I

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В результате изучения данного раздела студент должен:

знать

• основы рационального использования природных ресурсов и материалов, эффективного преобразования энергии;

• основополагающие физические законы, необходимые при разработке и изготовлении машиностроительной продукции;

• основные законы механического движения материальных тел и сил их взаимодействия, методы описания движения материальной точки, тела и механической системы;

уметь

• применять физико-математические методы для проектирования изделий и технологических процессов в машиностроении с применением стандартных средств;

• применять основные законы кинематики и динамики к решению конкретных технических задач;

• использовать законы и методы механики при решении теоретических и практических задач в различных областях техники — решению прямой и обратной задач кинематики и динамики, к рассмотрению проблем собственных и вынужденных колебаний, к использованию общих теорем динамики механических систем; к составлению, анализу и решению уравнений движения системы тел;

владеть

• навыками разработки новых и применения стандартных программных средств на базе физико-математических моделей в конкретной предметной области;

• навыками составления, расчета и анализа механических систем с использованием уравнений статики, кинематики и динамики.

Теоретическая механика (ТМ) является наукой о движении материальных тел. Механика рассматривает причины и условия перемещения тел (и изменений производных от этих перемещений: скорости и ускорения) во времени и пространстве с учетом влияния сопротивления среды и других тел. Тела представляются совокупностью материальных точек, соединенных в компактную массу внутренними силами. Отдельная материальная точка обладает массой, но ее размеры исчезающе малы. Движения таких условных точек в ряде случаев равнозначны (адекватны) движению тел. **Масса** есть мера количества вещества и измеряется в килограммах. **Сила** — это мера взаимодействия между материальными телами. Силы взаимодействия между точками, слагающими данное тело, называются **внутренними**. **Внешние** силы, действующие на тело, определяют закономерности его движения. Взаимодействующие тела могут образовать систему, подчиняющуюся некоторым общим законам движения. Отметим, что если нет оговорок, то речь идет о жестких недеформируемых телах.

Курс ТМ предполагает, что перемещение тел — макроскопическое, т.е. во много раз большее, чем, например, колебательные движения микрочастиц, из которых слагается тело. Микроперемещения рассматриваются в специальных курсах (сопротивления материалов, физической химии и других разделах науки). В данном случае можно говорить о механическом движении (в отличие от молекулярного, теплового движений). Механика в философском смысле стоит на естественно-материалистических позициях и ее развитие определялось развитием способов производства с обособлением научных направлений и неуклонным стремлением общества к научно-техническому прогрессу и повышению экономического уровня жизни.

Исторически, основные принципы механики начинают складываться с античных времен. Античные мыслители (Эпикур, Демокрит, Архимед, Герон Александрийский, Лукреций и др.) заложили основы понимания прямолинейного движения, центров тяжести тел, принципы рычага и сложения сил, инерционности движения, сопротивления среды. Все это было возможно при значительном развитии геометрии, трудов Евклида и Пифагора. В раннее Средневековье, вплоть до XV—XVI вв. в развитии механики значительных сдвигов не было. Господствовали схоластические взгляды Аристотеля и некоторое развитие идей античных авторов арабскими учеными-философами. Отметим, что до XVII—XIX вв. почти все занятия наукой относились к философии.

Огромный толчок в развитии механики (в первую очередь динамики) дали труды Галилея (1564—1642) и Ньютона (1643—1727). Выдвинутые ими основные положения и сформулированные законы нашли блестящее подтверждение в различных прикладных областях (Кеплер — в небесной механике, Торричелли — в теории брошенных тел, Гук и Гюйгенс — в теории колебаний маятника и др.). В России наибольшее значение в развитии теоретической механики и ее приложений имеют работы М. В. Остроградского

(1801—1861), Н. Е. Жуковского (1847—1921), С. А. Чаплыгина (1869—1942), П. Л. Чебышева (1821—1894), А. М. Ляпунова (1857—1918), А. Н. Крылова (1863—1945), И. И. Артоболевского (1905—1977) и ряда других ученых.

Развитие новых математических идей и компьютеризация сильно повлияли на современную механику. В частности, стало возможным решение сложнейших задач так называемой нелинейной механики, востребованной современными отраслями науки и техники.

В связи с развитием современных отраслей промышленности и отдельных видов технической продукции, многие разделы механики — теория колебаний, динамика машин, строительная механика, механика грунтов, робототехника и ряд других, рассматриваются в рамках самостоятельных отдельных дисциплин. Вместе с тем, с учетом указанного выше, в принципиальном смысле следует различать два основных раздела механики — механика недеформируемых тел (классическая механика) и механика деформируемых тел.

Дальнейший прогресс в развитии механики лежит в направлении использования ее основных положений и методов теоретического анализа в таких отраслях знаний, как химия, физика, почвоведение и др. Например, в отдельную дисциплину оформилась физико-химическая механика, рассматривающая методы управления структурно-механическими свойствами дисперсных систем.

Математическое обеспечение курса (МО). Для успешного усвоения теоретического курса механики и решения прикладных задач необходимо иметь достаточно твердые понятия по следующим разделам математики:

- тригонометрические функции углов, соотношения между сторонами прямоугольного и косоугольного треугольников;
- решение биквадратного уравнения и системы нескольких алгебраических уравнений;
- основные формулы определения площадей и объемов геометрических тел;
- логарифмирование функций, определение логарифмов чисел;
- алгебраическое и геометрическое изображения простейших линейных и нелинейных функций;
- простейшие методы векторного изображения и векторного анализа (проекции векторов на оси координат, сложение и разложение векторов);
- основы дифференцирования и интегрирования функций и их геометрическая интерпретация (связь дифференцирования с тригонометрическими величинами и соотношениями сторон элементарного треугольника и интегрирование как суммирование элементарных площадей);
- знание простейших методов решения дифференциальных уравнений, умение пользоваться справочниками по математике при дифференцировании, интегрировании сложных функций и решении дифференциальных уравнений.

Предполагается, что эти разделы изучены частично в школьном курсе математики и изучаются в вузе перед соответствующими лекциями по механике.

Вместе с тем автор считает полезным давать в тексте настоящих лекций краткие пояснения по указанным математическим понятиям и методам в виде справочных данных и примеров с разъяснением, где это возможно, физического смысла математических операций (см. справки).

Глава 1
ЗАКОНЫ НЬЮТОНА – ГАЛИЛЕЯ КАК ОСНОВА КУРСА КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Основные законы механики сформулированы итальянским ученым Галилео Галилеем и английским ученым Исааком Ньютоном. Эти законы носят фундаментальный характер. В соединении с математической базой дифференциального и интегрального исчисления они являются основой для решения сложных практических задач от расчетов различных машин и механизмов до движения планет и других небесных тел. Рассмотрим сущность этих законов в логической последовательности.

1.1. Основной (фундаментальный) закон механики

Согласно этому закону сила, действующая на тело, пропорциональна ускорению движения тела, вызванного действием этой силы в направлении ее действия (направленность силы и ускорения указаны стрелками)

$$\vec{P} = \vec{a} \cdot m. \tag{1.1}$$

Здесь масса тела m определяет количество вещества (в кг) и является коэффициентом пропорциональности между силой P и ускорением a.

Эта известная из школьного курса формула выражает связь между силовым P и кинематическим параметром. Ускорение — a есть мера изменения другого кинематического параметра — скорости.

Если на тело действует несколько сил, то указанная в (1.1) сила P является равнодействующей этих сил в заданном направлении. Например, если вдоль оси 0 — 0 действуют две силы F и R в одном направлении и одна — Q в противоположном, то суммарная сила $P = F + R - Q$. Подробнее о сложении сил будет сказано ниже.

Учитывая, что масса, в общем случае, величина непостоянная (например, при работе зерноуборочного комбайна масса машины увеличивается за счет поступающего зерна, а при работе сеялки — уменьшается), уравнение (1.1) можно записать в наиболее общем, дифференциальном виде:

$$\vec{P} = d(m\vec{V})/dt. \tag{1.2}$$

Произведение $m\vec{V}$ называется **количеством движения**. Таким образом, сила P как равнодействующая всех сил в данном направлении является в математическом смысле первой производной от количества движения по времени.

Любое число сил, действующих в данной плоскости, можно заменить одной — равнодействующей и, наоборот, любую силу можно разложить на несколько сил. Критерием правильности таких замен служит неизменность получаемого телом ускорения.

Основные единицы измерений механических величин — килограмм (кг), метр (м), секунда (с). Специальные единицы измерений, называемые часто в честь великих ученых, всегда могут быть выражены через эти три основные единицы. Единица силы имеет размерность кгм/с^2 и называется Ньютоном (Н).

1.2. Кинематические величины, их определение и основные соотношения

В механике используются следующие основные термины и определения: **сила** — мера механического воздействия двух (или нескольких) тел друг на друга, являющаяся причиной изменения характера (закономерностей) движения. Закономерности (законы) движения выражаются зависимостями изменения перемещения или скорости от времени.

Перемещение определяется расстоянием между двумя последовательными положениями данной точки тела. Положение любой точки тела определяется двумя координатами при плоском движении и тремя координатами в пространственном движении (x, y, z). Например, величина перемещения точки из положения A в положение B вдоль оси $0x$ равно $x_2 - x_1$, соответственно по оси $0y$ составляет $y_2 - y_1$.

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ путь $AB \to S$, где $S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Скорость — мера интенсивности изменения пути во времени. Она равна отношению приращения пути к приращению времени: $V = \Delta S/\Delta t$, соответственно, скорость вдоль осей $0x$ и $0y$: $V_x = \Delta x/\Delta t$, $V_y = \Delta y/\Delta t$. При вращении скорость измеряется в единицах угла поворота φ (угловое перемещение) радиуса вращения в единицу времени. Угловое перемещение принято измерять не в градусах, а в радианах. 1 радиан = $360/2\pi \approx 57{,}3°$. Таким образом, угловая скорость $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ рад/с (или 1/с).

Ускорение — интенсивность изменения скорости в единицу времени и для линейного и углового перемещений определяется выражениями

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ — линейное ускорение;} \quad \varepsilon = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ — угловое ускорение.}$$

На данном отрезке пути (S) **средняя скорость** $V_c = \Delta S/\Delta t$. **Истинная** (мгновенная) **скорость** есть предельная величина этого соотношения, когда промежуток времени Δt стремится к нулю. Математически это записывается в виде

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \tag{1.3}$$

Здесь dS, dt означают бесконечно малые величины в отличие от ΔS, Δx, Δy, Δt, имеющих некоторые конечные значения.

Все перемещения отсчитываются от произвольной начальной точки (принятой из физических соображений). При приближении к этой точке принято придавать кинематическим величинам знак «минус». Соответственно, истинные угловые скорости и ускорения равны

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.4}$$

Линейное ускорение прямолинейного движения $a = dV/dt$. Ниже будут даны более полные взаимосвязи между кинематическими параметрами. Отметим, что совокупность действия нескольких сил может не только вызвать движение тел, но и наоборот, привести тело (или систему тел) в состояние покоя. При постоянной скорости (в том числе и при $V = 0$) тело находится в равновесии. В этом случае силы уравновешивают друг друга и ускорение равно нулю.

Сила и кинематические параметры — величины векторные. Это означает, что для полной их характеристики нужно знать не только их физическую величину (выражаемую через кг, м, с), но и направление в пространстве или плоскости по отношению к осям координат (или выбранному направлению).

Траектория определяет характер изменения направления движения. Длина траектории равна пути, пройденным данной точкой тела в течение заданного времени. Различают замкнутые *3* и незамкнутые траектории *1*, *2*. Любая плоская траектория выражается зависимостью через координаты точки в виде $x = f(y)$. Например, на рис. 1.1 уравнение прямой *1* и окружности *3* имеют вид: $x = cy$ и $x^2 + y^2 = R^2$, где c и R — постоянные величины (коэффициенты).

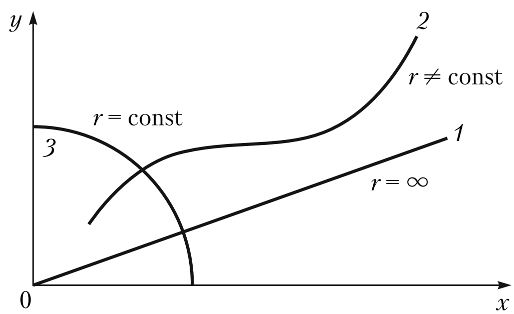

Рис. 1.1. **Виды траекторий**

1.3. О систематике движения

Согласно закону Ньютона всякая материальная точка сохраняет **прямолинейное** движение (или состояние покоя) пока нет воздействия сил, которые выведут ее из этого состояния. Таким образом, прямолинейное движение выступает как простейшая форма движения при отсутствии воздействующих на данный материальный объект сил.

Однако в окружающем нас мире, где все движущиеся объекты взаимодействуют друг с другом и средой, наиболее естественной формой механического движения является **криволинейное движение**. Например, кажущееся прямолинейным движение автомобиля по дороге на самом деле является криволинейным не только вследствие кривизны земной поверхности, но и вследствие неровностей дороги, переменной силы сопротивления движению (переменная сила трения дорожного полотна, наличие ветра и т.п.).

Криволинейное движение (см. рис. 1.1, кривая *2*) можно представить как движение точки вокруг движущегося центра с переменным радиусом вращения — r. В частном случае, при $r = \text{const}$ и неподвижном центре вращения получаем «чистое» вращение, когда точка описывает в плоскости окружность (см. рис. 1.1, кривая *3*), а в пространстве (при $r = \text{const}$ и равномерном движении центра тяжести) — винтовую линию (спираль). При неравномерном движении центра вращения вдоль оси координат и $r = \text{const}$ образуется винтовая линия с переменным шагом (расстоянием между витками). В общем случае при $V \neq \text{const}$ и $r = f(x, y, z, t)$ получаем общий случай **сферического вращения**.

Принято называть простейшими основными видами движения **вращательное** и **поступательное движения**, а более сложное движение слагается из этих двух видов движения.

Поступательным движением тела называется движение, при котором траектории всех точек тела тождественны, т.е. перемещения всех точек тела за любой момент времени одинаковы; соответственно, скорости и ускорения всех точек тела в любой заданный момент времени равны (рис. 1.2).

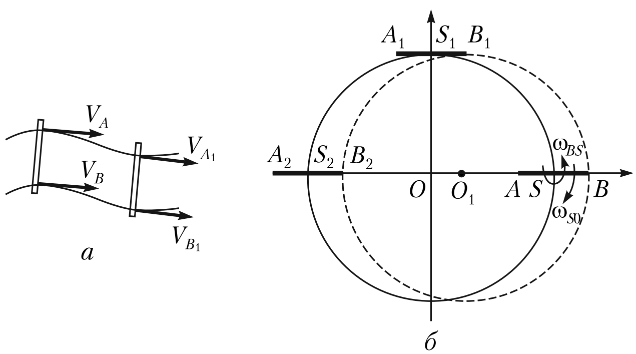

Рис. 1.2. **Вращательное и поступательное движения**

Вращательное движение на плоскости и прямолинейное движение являются **элементарными**. Их принципиальное отличие заключается в том, что в прямолинейном движении векторы скорости и ускорения параллельны друг другу, а во вращательном эти векторы образуют между собой некоторый угол, отличный от нуля (но не превышающий 90°).

Поступательное движение может быть представлено как сумма двух элементарных вращательных движений. Например (см. рис. 1.2, *б*), движение педали велосипеда, сохраняющей свое положение в пространстве (при равномерном вращении центра S педали вокруг точки 0), в соответствии с вышеприведенным определением, будет поступательным. Траектории любых точек педали (A, B, S) — окружности. Однако такое положение педали является принудительным. Чтобы педаль сохраняла положение, соответствующее определению поступательного движения, можно придать ей элементарное вращательное движение вокруг точки S в направлении, обратном вращению точки S вокруг центра 0. При этом должно соблюдаться равенство угловых скоростей вращения: угловые скорости $\omega_{BS} = \omega_{S0}$. Отметим, что здесь и далее порядок написания индексов при кинематической величине таков: первая буква (например, S) означает какой точке принадлежит данная величина, вторая — относительно какой точки рассматривается движение (в данном случае — вращения).

Справка 1

В практике часто используют (особенно при графическом определении производных — скорости и ускорения) малые приращения пути или скорости вместо бесконечно малых величин dS и dV. При этом чем меньше взятое приращение, тем ближе полученное значение кинематической величины к истинному ее значению.

Отношение двух бесконечно малых величин в формулах (1.3), (1.4) называются производными от заданной функциональной зависимости (функции), например, $S = f(t)$ или $V = f(t)$. Производные $V = dS/dt$ и $a = dV/dt$ определяются дифференцированием этих заранее известных функций по правилам, изложенным в математическом курсе дифференцирования. Например, пусть функции заданы зависимостями $S = 5 + 2t$ и $V = 3t$, тогда из первой функции получаем $V = d(5 + 2t)/dt = 2$ м/с, т.е. скорость постоянна, а ускорение $a = d(2)/dt = 0$.

Из второй функции можно найти ускорение $a = d(3t)/dt = 3$ м/с^2. Из формулы (1.3) следует, что $dS = Vdt$. Для определения зависимости пути от времени из функции $V = 3t$ в данном случае нужно произвести действие, обратное дифференцированию (интегрирование). Имеем интеграл $S = \int 3tdt$, откуда $S = 3t^2/2$, т.е. функция пути от времени имеет нелинейный характер и графически изображается параболой.

Правила дифференцирования элементарных функций:

1) $\dfrac{dx}{dt} = 0$ (при $x = \text{const}$), $\dfrac{dcx}{dt} = c\dfrac{dx}{dt}$ (при $c = \text{const}$);

2) $\dfrac{dx^n}{dt} = nx^{n-1}$;

3) $\dfrac{d(xy)}{dt} = x\dfrac{dy}{dt} + y\dfrac{dx}{dt}$; $\dfrac{d(x+y)}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}$;

4) $\dfrac{d(x/y)}{dt} = \dfrac{ydx/dt - xdy/dt}{y^2}$;

5) $\dfrac{d(\ln x)}{dt} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}$;

6) $\dfrac{d(\exp x)}{dt} = \exp x\dfrac{dx}{dt}$;

7) $\dfrac{d(\sin x)}{dt} = \cos x\dfrac{dx}{dt}$;

8) $\dfrac{d(\cos x)}{dt} = -\sin x\dfrac{dx}{dt}$;

9) $\dfrac{d(x^y)}{dt} = yx^{y-1}\dfrac{dx}{dt} + \ln x \cdot x^y\dfrac{dy}{dx}$.

Правила интегрирования элементарных функций:

1) $\int dx = x + c$, c — постоянная величина (для определенного интеграла $c = 0$ и величина $\int_0^x dx = x$);

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$;

3) $\int \cos x dx = \sin x + c$;

4) $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

5) $\int e^{bx}dx = \dfrac{e^{bx}}{a} + c$;

6) $\int \mathrm{tg}\, x^x dx = -\ln(\cos x) + c$;

7) $\int \dfrac{dx}{a + bx} = \dfrac{1}{b}\ln(a + bx) + c$;

8) $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \dfrac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + c$;

9) $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$.

1.4. Основные соотношения кинематических функций

Так как скорость, путь и ускорение являются производными друг от друга, для определения зависимости этих кинематических величин от времени достаточно знать одну из этих трех функций. В примере (см. справку 1) было показано, как по известной функции скорости от времени — $V = f(t)$ найти зависимости (функции) $a = f(t)$ и $S = f(t)$.

Определение всех кинематических функций по одной из них производится через следующие дифференциально-интегральные соотношения, вытекающие из сказанного выше

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad a = \frac{dV}{dt},$$

откуда

$$S = \int V dt; \quad V = \int a dt. \tag{1.5}$$

Из интегральных соотношений следует, что при V = const и a = const путь $S = Vt$ и скорость $V = at$. Таким образом, уравнения (1.5) используются только в случаях, когда исходная кинематическая величина является переменной.

Если в выражение для ускорения подставить скорость в виде показанной выше производной dS/dt, то получим $a = \dfrac{d}{dt}(dS/dt)$, откуда путь выражается через двойной интеграл

$$S = \iint (a dt) dt. \tag{1.6}$$

Пример. Ускорение тела постоянно и равно 2 м/с^2, найти скорость и величину пройденного пути через 10 с.

Решение. В данном случае заданная кинематическая функция движения записывается так: a = const = 2 м/с^2.

Скорость $V = \int_0^t a dt = \int_0^t 2 dt = 2\int_0^t dt = 2t$. При t = 10 с имеем V = 20 м/с.

Путь $S = \int_0^t V dt = \int_0^t 2t dt = 2\int_0^t t dt = t^2$. При t = 10 с имеем S = 100 м.

Можно сразу найти путь по формуле (1.6), выполнив двойное интегрирование поэтапно, как показано в примере.

Справка 2

В приведенном примере пределы интегрирования (в данном случае — начало и конец отсчета времени равны 0 и 10 с) заданы, поэтому интеграл от кинематической функции называется определенным.

Если пределы интегрирования неизвестны, берется так называемый неопределенный интеграл и тогда к конечному выражению прибавляется некоторая постоянная величина C. В этом случае получаем наиболее общее выражение.

Глава 2
КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВИДА ДВИЖЕНИЯ

2.1. Общее уравнение движения при постоянном ускорении

Для вышеприведенного примера (при $a = 2$ м/с^2) скорость $V = \int a dt = 2t + C$. Путь $S = \int V dt = \int (2t + C) dt = t^2 + Ct + C_1$. В общем случае при $a = \text{const}$

$$S = \frac{at^2}{2} + Ct + C_1; \quad V = at + C. \tag{2.1}$$

Здесь постоянные C и C_1 прибавляются к решению после первого и второго интегрирования. Чтобы найти эти постоянные величины, нужно знать значения пути и скорости в какое-то фиксированное время. Они определяются начальными условиями движения, т.е. при $t = 0$. Например, известно, что до начала движения по заданному закону уже пройденный путь равен 5 м с постоянной скоростью 3 м/с. Тогда начальные условия запишутся так: при $t = 0$, $S_0 = 5$ м, $V_0 = 3$ м/с.

Подставив начальные значения t, V_0, S_0 в полученные после интегрирования формулы, получаем: $C = V_0$; $C_1 = S_0$. Выражение (2.1) перепишется в виде

$$V = at + V_0; \quad S = \frac{at^2}{2} + V_0 t + S_0. \tag{2.2}$$

Если конкретные значения начального пути и скорости известны, например, $S_0 = 5$ м и $V_0 = 3$ м/с получим (при $a = 2$ м/с^2)

$$V = 2t + 3; \quad S = t^2 + 3t + 5.$$

Выражения (2.1) и (2.2) называются уравнениями **равноускоренного движения** (движения при равном ускорении). При постоянной скорости ускорение равно нулю и уравнения движения принимают вид

$$V = V_0 = \text{const}; \quad S = V_0 t. \tag{2.3}$$

Это уравнения **равномерного движения**.

Справка 3

Для решения задач и последующего изучения курса полезно знать нижеследующие соотношения сторон треугольников и тригонометрических функций (рис. 2.1):

$$\frac{a}{c} = \operatorname{tg}\alpha; \quad c = b\cos\alpha; \quad a = b\sin\alpha; \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

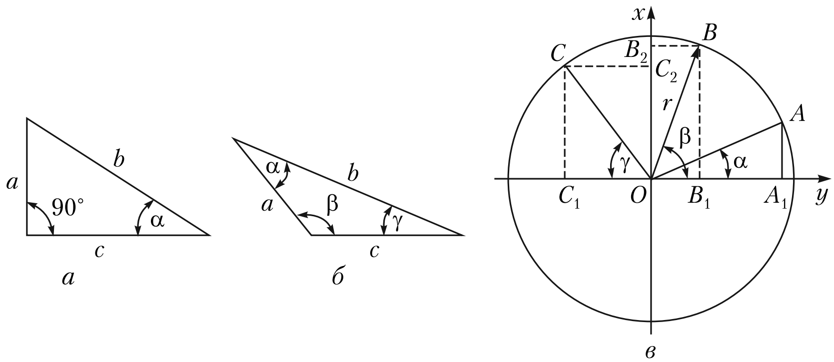

Рис. 2.1. **Соотношения сторон прямоугольного треугольника**

Соотношения сторон косоугольного треугольника (рис. 2.1, *б*)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma; \quad \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Основные тригонометрические функции углов ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$) имеют смысл отношения сторон прямоугольного треугольника.

Более общий смысл этих функций усматривается при рассмотрении вращения отрезка прямой (радиуса r) вокруг неподвижной точки O (см. рис. 2.1, *в*). При вращении отрезка изменяются углы его наклона к неподвижным осям x и y. Конец отрезка длиной r последовательно занимает положения OA, OB, OC и т.д. Перпендикуляры из точек A, B, C на оси координат отсекают на осях отрезки OA_1, OB_1, OC_1 — на оси x и отрезки OA_2, OB_2, OC_2 — на оси y. Эти отрезки называются **проекциями** радиуса вращения на соответствующие оси координат. Проекции идентичны катетам образованных треугольников OAA_1, OBB_1 и т.д.

В данном случае тригонометрические функции записываются в виде соотношений проекции радиуса r к его длине

$$\cos\alpha = \frac{OA_1}{r}; \quad \sin\alpha = \frac{AA_1}{r}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AA_1}{OA_1}.$$

Здесь $r = OA = OB = OC$.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BB_1}{OB_1}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{CC_1}{OC_1}; \quad \sin\gamma = \frac{C_1O}{CO} \text{ и т.д.}$$

Как известно, угол, соответствующий полному обороту радиуса равен 360°. В теории более удобно пользоваться единицей углового перемещения, равной $360/2\pi \approx 57{,}3°$. Эта единица называется **радиан**.

Углы в радианах можно выразить отношением соответствующих дуг к радиусу

$$\alpha = \frac{\smile\!\!\!\!\!AD}{r}; \quad \beta = \frac{\smile\!\!\!\!\!BD}{r}; \quad \beta - \alpha = \frac{\smile\!\!\!\!\!AB}{r} \text{ и т.д.}$$

Полезно помнить соотношения

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Здесь $90° = \pi/2$ радиан; $180° = \pi$ радиан.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}; \quad \mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

2.2. Основные понятия о векторных величинах и их использовании при анализе движения тел

При решении практических задач и теоретическом анализе во многих случаях удобнее пользоваться графическими аналогами физических величин — векторами.

Вектор — геометрический отрезок, выражающий направление и величину (в выбранном масштабе) силового или кинематического параметра. Так, например, вектор силы $\vec{P} = \overrightarrow{(P/\mu_P)}$ (мм), вектор скорости $\vec{V} = \overrightarrow{(V/\mu_V)}$ (мм) и т.д. Здесь P и V — модули физических величин силы (Н) и скорости (м/с), μ_P и μ_V — соответствующие масштабы с размерностями (Н/мм) и (м/с·мм).

Сумма векторных величин, например, $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots$ означает сложение векторов отдельных сил геометрическим способом. При этом каждый вектор (в масштабе) откладывается из конца предыдущего вектора и отрезок, замыкающий полученную ломаную линию, является векторной суммой (рис. 2.2). При сложении проекций векторов на оси координат соблюдается правило знаков. За «+» принимается направление вектора от центра осей координат. Векторные величины изображаются отрезками со стрелками по направлению действия сил, скоростей, ускорений, пути.

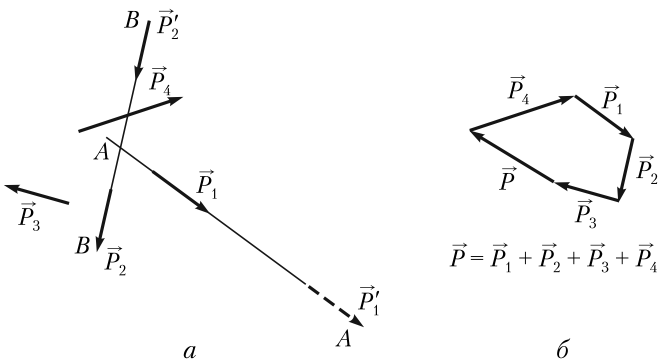

Рис. 2.2. **Геометрическое перемещение и сложение векторов силы**

Ряд физических величин и, в первую очередь, масса (определяющая количество материи) не могут иметь какого-либо направления. Это скалярные величины (**скаляры**).

Основные свойства векторных величин.

Вектор можно смещать в любую сторону по линии его действия. На рис. 2.2, *а* — *AA* и *BB* — линии действия сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$. Эти силы можно переместить в новое положение, показанное пунктиром ($\vec{P}_1'$ и $\vec{P}_2'$). От этого перемещения геометрическая сумма сил не изменится.

Векторные величины можно представить как сумму любого числа слагаемых, т.е. разложить на составляющие, представив в виде суммы проек-

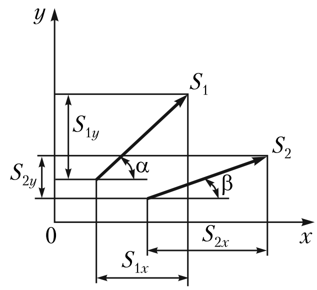

Рис. 2.3. **Проекции векторов S_1 и S_2 на оси координат**

ций на оси координат. Проекции векторов S_1 и S_2 на оси координат равны (рис. 2.3)

$$\begin{aligned} \vec{S}_{1x} &= \vec{S}\cos(\widehat{S_1, x}); \quad \vec{S}_{1y} = \vec{S}\cos(\widehat{S_1, y}); \\ \vec{S}_{2x} &= \vec{S}\cos(\widehat{S_2, x}); \quad \vec{S}_{2y} = \vec{S}\cos(\widehat{S_2, y}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

В соответствии с вышесказанным, $\vec{S}_1 = \vec{S}_{1x} + \vec{S}_{1y}, \vec{S}_2 = \vec{S}_{2x} + \vec{S}_{2y}$.

Проекции векторных величин на оси координат (x, y, z) *равны произведению величины вектора на косинус угла между направлением этого вектора и соответствующей осью координат.* Например, проекции пути S на оси x, y (см. рис. 2.3)

$$S_{1y} = S_1\cos(\widehat{S_1, y}) = S_1\cos(90^\circ - \alpha) = S_1\sin\alpha;$$

$$S_{1x} = S_1\cos\alpha; \quad S_{2x} = S_2\cos\beta.$$

При этом векторы S_1, S_{1x}, S_{1y} являются сторонами прямоугольного треугольника. Поэтому физическая величина пути

$$S_1 = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2}; \; S_2 = \sqrt{S_{2x}^2 + S_{2y}^2}. \tag{2.5}$$

В пространственной системе координат общий путь выражается геометрической суммой проекций $\vec{S} = \vec{S}_x + \vec{S}_y + \vec{S}_z$, или в аналитической форме

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \tag{2.6}$$

Зависимости (2.4) и (2.5) применимы для сложения других векторных величин, например, скорости (рис. 2.4).

Необходимо помнить, что в первом случае (рис. 2.2, *б*) сложение векторное, а во втором случае — алгебраическое, когда складываемые величины имеют соответствующую физическую размерность.

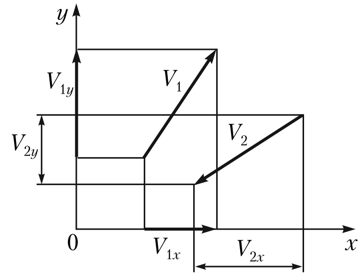

Рис. 2.4. **Сложение векторов скоростей**

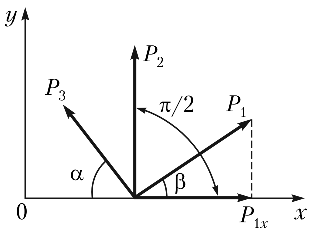

Рис. 2.5. **Равнодействующая силы**

При разложении и сложении векторов используются соотношения сторон прямоугольного и косоугольного треугольников (см. справку 3).

Векторный анализ более наглядно показывает направление движения. Покажем это на конкретном примере (рис. 2.5). Пусть на тело действуют три силы P_1, P_2, P_3, изображенные в виде векторов $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$. Сложим эти силы (т.е. найдем их равнодействующую). Эта суммарная (равнодействующая) сила в виде ее проекции на ось x

$$P_x = \sum P_{ix} = P_1\cos\beta + P_2\cos\frac{\pi}{2} - P_3\cos\alpha = P_1\cos\beta - P_3\cos\alpha,$$

если $\alpha = \beta$ и $P_1 = P_3$, то $\sum P_x = 0$ и движения нет.

В этом случае тело может двигаться только в одном направлении — y (хотя направления сил различны).

2.3. Способы задания движения точки

Из закона Ньютона, выраженном в виде «Всякое тело стремится сохранить состояние покоя ($V = 0$) или равномерного прямолинейного движения ($V = \text{const}$) до тех пор, пока действие внешних сил не изменит это состояние», следует, что внешние силы могут изменять равномерность и прямолинейность движения. Наиболее общий случай — неравномерное криволинейное движение.

Заданный способ движения определяет положение точки в любой момент времени для принятой системы координат. Можно использовать три способа задания криволинейного движения: координатный, векторный и естественный.

Уравнения движения в декартовых (прямоугольных) координатах. Для этого случая (рис. 2.6) положение точки M определяется расстоянием от начала координат (точка 0). Эти расстояния называются координатами точки: x, y, z. Соответствующие уравнения движения для плоскости имеют вид: $x = f(t)$, $y = f(t)$. Уравнение $z = f(t)$ добавляется для поступательного движения в пространственной системе координат.

Уравнения движения в полярных координатах. Если обозначить расстояние точки до полюса (начала координат) $0M = r$, то положение точки вполне определится углом α и величиной радиуса r. Координаты α и r называют полярными. Уравнения движения в полярных координатах $r = f(t)$, $\alpha = f(t)$.

Пример. Пусть эти функции заданы в виде: $r = bt^2$, $\alpha = ct$, где b и c — постоянные коэффициенты. Тогда радиальная скорость и угловая скорость выразятся в виде

$$V_r = \frac{d(bt^2)}{dt} = 2bt; \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(ct)}{dt} = c = \text{const}.$$

Можно перейти от одних координат к другим, например из рис. 2.6 следует, что

$$x_1 = r_1\cos\alpha_1; \quad y_1 = r_1\sin\alpha_1.$$

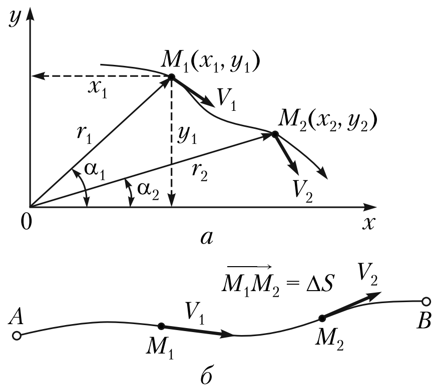

Рис. 2.6. **Движение материальной точки в декартовых и полярных координатах**

В векторной форме уравнение движения задается в виде $\vec{r} = f(t)$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор, имеющий переменную величину и направление во времени. Этот вектор определяет положение точки M в любой момент времени.

Естественный способ задания движения. В этом случае должна быть известна траектория движения и его направление (см. рис. 2.6, *б*). Движение описывается уравнением зависимости пути S от времени $S = f(t)$. Скорости в любой точке направлены по касательным к траектории в сторону движения точки. Если траектория показана в известном масштабе, то величина скорости определяется по приращению пути $V = \dfrac{\Delta S \mu_s}{\Delta t \mu_t}$.

При переходе от полярных к прямоугольным координатам имеем

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\alpha)}{dt} = r\frac{d(\cos\alpha)}{dt} + \cos\alpha\frac{dr}{dt} = \cos\alpha\frac{dr}{dt} - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt};$$

$$V_y = \sin\alpha\left(\frac{dr}{dt}\right) + r\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt}\right). \tag{2.7}$$

Для вышеприведенного примера, когда заданные функции радиуса и угла равны: $r = bt^2$ и $\alpha = ct$, проекция скорости $V_x = 2bt\cos\alpha - cr\sin\alpha$. В полярных координатах уравнения траекторий во многих случаях выглядят проще. Например, уравнение спирали Архимеда имеет вид: $r = b\varphi$.

2.4. Вращательное движение как основная форма относительного движения тел

Для природных процессов наиболее характерно именно вращательное движение, а прямолинейное движение можно рассматривать как частный случай вращательного, когда радиус вращения равен бесконечности ($r = \infty$).

Рассмотрим соотношение кинематических параметров при вращении точечного тела массой m (рис. 2.7). Чисто вращательное движение тела получим при неподвижной оси вращения (если ось движется, получаем сложное движение, которое будет рассмотрено ниже).

Легко заметить, что любая точка тела (см. рис. 2.7, *а*), например A, C, D движется по круговой траектории (окружности) с радиусом вращения r_i.

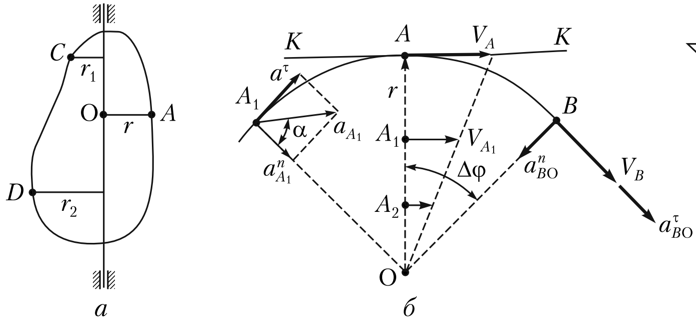

Рис. 2.7. **Вращение точечного тела**

Движение тела можно рассматривать как совокупность вращательных движений всех его точек относительно данной оси. Рассмотрим движение материальной точки A массой m_i вокруг точки O.

При повороте радиуса r на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$ перемещение точки $ds = \overset{\smile}{AB} = rd\varphi$. Тогда касательная линейная скорость

$$V = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega, \qquad (2.8)$$

где $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ — **угловая скорость** (имеет размерность — радиан/с или 1/с). По аналогии с линейным ускорением производная $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ — это **угловое ускорение** (имеет размерность рад/с^2 или с$^{-2}$).

Заметим, что линейные скорости точек, лежащих на радиусах OA или OB, разные и зависят от расстояния до центра вращения (т.е. от радиуса), в то время как угловые скорости всех точек радиуса одинаковы, так как одинаков для них угол поворота (угловое перемещение $\Delta\varphi$).

Для общего случая неравномерного движения при перемещении точки в положение «B» векторы скорости $\vec{V}_A \neq \vec{V}_B$.

Разность этих векторов $\vec{V}_A - \vec{V}_B \neq \Delta\vec{V}$ при $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ равна не нулю (ввиду несовпадения их направлений), а величине $\Delta\vec{V}_1$. Таким образом, полное изменение векторной скорости $\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_1 + \Delta\vec{V}_2$. Здесь $\Delta V_2 = V_A - V_B$ — алгебраическая разность скоростей точки в положении «A» и «B», а $\Delta\vec{V}_1$ — векторная разность.

Для бесконечно малого углового приращения $\Delta\varphi$ величина $\Delta V_1 = \Delta V_B\varphi$, а ее направление (см. рис. 2.7, *в*) совпадает с направлением радиуса и направлено к центру вращения «О».

При изменении скоростей величины их приращения V_1 и V_2 определяют соответствующие ускорения

$$a^\tau = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \quad \text{и} \quad a^n = \frac{\Delta V_1}{\Delta t}.$$

В пределе (при $\Delta t \to 0$) получаем $a^\tau = \dfrac{dV_2}{dt}$ — **тангенциальное (касательное) ускорение**, идентичное ускорению прямолинейного движения (его вектор параллелен вектору скорости).

Величина $a^n = \dfrac{dV_1}{dt}$ называется **нормальным ускорением**. Поскольку $\Delta V_1 = V\varphi$, а $V = \omega r$, то $a^n = \omega r \dfrac{d\varphi}{dt}$. Поскольку $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$, а угловая скорость $\omega = V/r$, величина нормального (центростремительного) ускорения

$$a^n = \omega^2 r = \frac{V^2}{r}. \tag{2.9}$$

Из рис. 2.7 нетрудно увидеть, что векторы ΔV_1 и ΔV_2 взаимно перпендикулярны при $\Delta\varphi \to 0$, а значит, и векторы ускорений a^τ и a^n взаимно перпендикулярны. Поэтому **полное ускорение** любой точки

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2}. \tag{2.10}$$

В поступательном движении $a^n = 0$.

Полное ускорение направлено под углом к радиусу вращения. Величина этого угла

$$\cos\alpha = \frac{a^n}{a}. \tag{2.11}$$

Использование векторного описания вращательного движения. Формула Эйлера. Общие понятия о векторном изображении кинематических параметров даны в начале главы. Отметим, что вектор — это всякий направленный отрезок, длина которого называется модулем. Величина физического параметра, не обладающая направлением, называется скаляром (например, масса тела).

Нередко для описания вращательного движения используется векторное задание движения. Рассмотрим это на примере тела, вращающегося вокруг оси Az (рис. 2.8). Точка B тела движется по окружности с линейной скоростью $V = R\omega$. Модуль скорости равен длине вектора скорости $\vec{V}$, перпендикулярного радиусу траектории движения точки B (см. рис. 2.8). В общем случае величина радиуса R может быть переменной. Если соединить радиусом-вектором $\vec{r}$ точку B с произвольным центром A (возможно другое положение этого центра, например, показанное на рисунке пунктиром), то для движения точки B по окружности радиус $R = r\sin\alpha$, а значение вектора скорости $V = r\omega\sin\alpha$.

Здесь $\vec{\omega}$ — векторное изображение угловой скорости вращения. Вышеизложенное свидетельствует о том, что модуль линейной скорости численно равен модулю нового вектора $\vec{\omega}\cdot\vec{r}$ (векторного произведения угловой скорости и радиуса-вектора). Этот новый вектор, согласно правилам векторного умножения, перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и радиус-вектор $\vec{r}$ и направлен в сторону вектора $\vec{V}$, если поворот вектора угловой скорости в сторону радиуса-вектора на наименьший угол производится против часовой стрелки. В ином случае — вектор $\vec{\omega}\cdot\vec{r}$ направлен в обратную сторону.

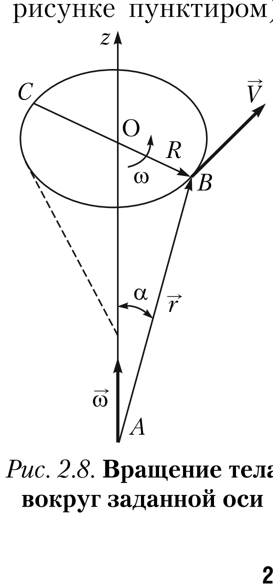

Рис. 2.8. **Вращение тела вокруг заданной оси**

Вектор скорости лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника *OAB,* т.е. векторы $\vec{\omega}\times\vec{r}$ и $\vec{V}$ параллельны друг другу и имеют одинаковые модули, поэтому

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{2.12}$$

Таким образом, *вектор линейной скорости любой точки твердого тела во вращательном движении равен векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор этой точки.* Это уравнение называется **формулой Эйлера**.

Дифференцирование выражения (2.12) по времени позволяет получать вектор ускорения

$$\vec{a}=d\vec{V}/dt=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{V}. \tag{2.13}$$

Вектор $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}=\vec{a}_r$ — касательное ускорение точки. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен по вектору $\vec{\omega}$ (со знаком плюс, если вращение ускоренное, и со знаком минус, если — замедленное). Второй вектор $\vec{\omega}\times\vec{V}$ равен нормальному ускорению данной точки. Векторная сумма нормального и касательного ускорений дает полное ускорение.

2.5. Силовые факторы поступательного и вращательного движения

Закон Галилея — Ньютона гласит: «Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие». Сказанное поясняется примерами (рис. 2.9). Тело давит на плоскость силой тяжести $\vec{P}=m\vec{g}$, а плоскость оказывает противодействие этому давлению. Это противодействие называется **реакцией**. Сила реакции $-\vec{R}=-\vec{P}$ или $\vec{P}+\vec{R}=0$.

В подвешенной нити также возникает реакция, равная силе натяжения нити. Число реакций равно числу опор. Например, в балке на двух опорах (см. рис. 2.9, *б*) — две реакции, сумма которых равна силе *P*. В общем случае направление реакций зависит от типа опор и координатных направлений внешних сил. При контакте сферических тел реакции перпендикулярны касательным (*K*—*K*) и называются нормальными реакциями — *N* (см. рис. 2.9, *г*, *д*). Так как любая сила может быть представлена суммой несколь-

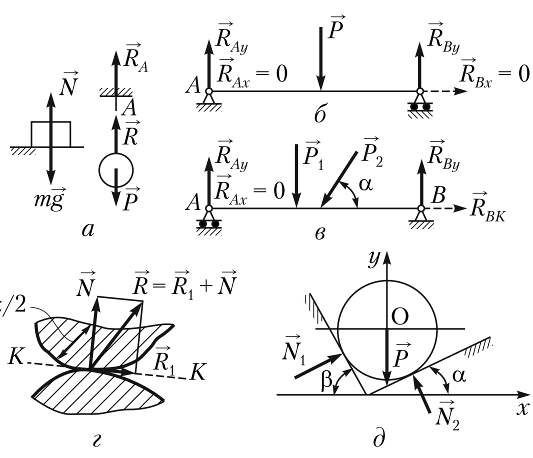

Рис. 2.9. **Действие сил при вращательном и поступательном движениях**

ких сил, то для удобства расчетов в плоской системе суммарные реакции разлагаются на две слагаемые, направленные по осям координат, т.е. (см. рис. 2.9, *б*, *в*)

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}; \quad \vec{R}_B = \vec{R}_{Bx} + \vec{R}_{By}.$$

Тогда для балки (см. рис. 2.9, *в*) имеем четыре неизвестные реакции, но с известными направлениями. Если сумма реакций не равна действующей активной силе (или сумме внешних сил), тело должно двигаться — это неравновесная система, подчиняющаяся уравнениям динамики.

Силовой фактор вращательного движения. Любые две равные параллельные и противоположно направленные силы P образуют так называемую **пару сил** (рис. 2.10). Если эти силы не действуют по одной прямой, то их нельзя заменить одной силой, действие которой было бы равнозначно этим двум параллельным силам (хотя сумма проекций этих сил на оси координат равна нулю). Пара сил стремится создать вращение тела, к которому они приложены. Количественно пара сил выражается **моментом сил** $\vec{M} = \vec{P}h$.

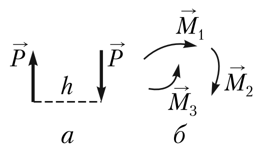

Рис. 2.10. **Пара сил и момент силы**

Величина M является самостоятельным силовым фактором вращательного движения и определяет изменение кинематических параметров (угловой скорости, углового ускорения) вращения. Сила же P определяет изменение кинематических факторов поступательного движения.

Пару сил можно переносить в любую плоскость, параллельную данной, не изменяя ее действия на тело.

Равнодействующий (главный) момент является простой суммой всех моментов, действующих в данной плоскости. Например, главные моменты силовых пар (см. рис. 2.10, *б*)

$$M = -M_1 - M_2 + M_3 = -P_1h_1 - P_2h_2 + P_3h_3.$$

Здесь за положительное направление принято вращение против часовой стрелки.

На рис. 2.11 показана стенка, на которую действует опрокидывающая сила P. Если реакция $R = 0$, то стенку нельзя опрокинуть любым силовым моментом. В данном случае R — это сила трения стенки о поверхность. Логически это объясняется тем, что любой момент — это пара сил и если одна из сил, составляющих пару, равна нулю, то и опрокидывающий момент равен нулю. Реакция равна нулю, когда стенка лежит на плоскости, трение по которой равно нулю. В самом деле, опрокидывающий момент $M = PH$, а момент придающий устойчивость стенке $M = mgb$. Очевидно для опрокидывания необходимо условие: $mgb < PH$. Тогда опрокидывающая сила $P = mgb/H$. В то же время, исходя из понятия момента как пары сил величина $R = P$. Минимальная величина опрокидывающего плеча $H = mgb/R$. При $R = 0$ величина плеча равна бесконечности, что доказывает невозможность опрокидывания (т.е. вращения) при

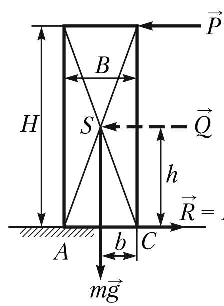

Рис. 2.11. **Опрокидывание стенки**

отсутствии сопротивления перемещению стенки по плоскости. Момент опрокидывания можно создать силой Q на плече h.

Возьмем конкретный пример. Пусть скольжению стенки препятствует сила трения F (равная реакция R). Сила F пропорциональна давлению на поверхность и в данном случае выражается зависимостью $F = mgf$, где f — коэффициент трения. В равновесном положении $P = F$. Эти силы образуют пару сил с плечом H.

Тогда из условия опрокидывания $mgb \leqslant fmgH$, получаем, что плечо приложения силы P должно удовлетворять условию: $H \geqslant b/f$. Примем толщину стенки $B = 2$ м, коэффициент трения $f = 0{,}4$. Плечо силы тяжести $b = B/2$. В этом случае опрокидывающее плечо должно быть не менее 2,5 м. Чтобы опрокинуть стенку высотой 2 м, необходимо увеличить сопротивление ее перемещению, например, поставив специальный упор вблизи точки A.

При вращении силовой фактор, т.е. силовой момент $M = Pr = mr\dfrac{dV}{dt}$, так как $P = m\dfrac{dV}{dt}$. Линейная скорость связана с угловой соотношением $V = \omega r$. С учетом этого получим

$$Pr = mr^2\frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad M = (mr^2)\frac{d\omega}{dt}. \tag{2.14}$$

Для системы точечных тел $mr^2 = \sum m_i r_i^2 = J$.

Величина J называется **геометрическим моментом инерции тела**. Таким образом, на основе уравнения Ньютона (1.2) получаем его аналог, выражающий **уравнение динамики вращательного движения** в общей форме

$$M = J\frac{d\omega}{dt}. \tag{2.15}$$

Отметим еще раз, что уравнение Ньютона (1.2) является общей формой уравнения динамики поступательного движения. В уравнениях (1.2)—(2.14) силовые факторы M и P связаны с кинематическими параметрами движения — ω и V. *Величина J выступает как аналог массы во вращательном движении* и показывает, что при анализе вращательного движения нужно знать не только массу тела, но и ее распределение в пространстве по отношению к оси вращения.

При вращении плоского тела его можно представить в виде множества материальных точек, так что их общий момент инерции

$$J = \sum m_i r_i^2. \tag{2.16}$$

Здесь $\sum m_i = m$ — массе всего тела, r_i — радиус (расстояние до оси вращения) каждой элементарной массы. При приближении элементарных масс к их бесконечно малым величинам, получаем интегральную форму для вычисления момента инерции

$$J = \int r^2 dm. \tag{2.17}$$

Приведем примеры вычисления момента инерции некоторых тел. Вычислим величину J для пластин одинаковой массы, но с разными центрами вращения (рис. 2.12). Выделим узкую полоску с элементарной массой шириной dr (заштрихована). Величина элементарной массы выразится в виде

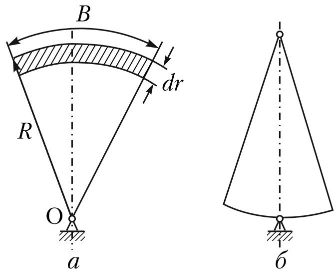

Рис. 2.12. **Вращение одинаковых пластин с разными центрами вращения**

произведения объема полоски на плотность $dm = \gamma b dF$, где dF — выделенная площадка толщиной b, γ — плотность.

Величина $dF = 2r\mathrm{tg}(\alpha/2)dr = 2r\mathrm{tg}(B/2R)dr$, $dm = 2brdr\mathrm{tg}(B/2R) = Drdr$, $D = \mathrm{const}$. Подставив dm в формулу (2.17), получим

$$J_0 = \int_0^R Dr^3 dr = D\frac{R^4}{4}.$$

Вычисление по рис. 2.12 дает значение $J_B = DR^4/12$ (в три раза меньше). В физическом смысле это означает, что пластину в положении «а» привести в движение до заданной скорости труднее, чем в положении «б». При этом соотношение силовых моментов для разгона тела до заданной скорости (при одинаковом времени разгона) будет равно 3:1. Соответственно, работа для остановки тела «а» будет превышать в 3 раза работу для остановки тела в положении «б». Сравнение кинематических и силовых параметров от вида движения приведено в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Основные силовые и кинематические параметры

Параметры	Поступательное движение	Вращательное движение
Кинематические	Перемещение — S, м $S = \int V dt = \iint a dt^2$	Угловое перемещение — φ, рад $\varphi = \int \omega dt = \iint \varepsilon dt^2$
	Скорость — V, м/с $V = \frac{dS}{dt}$	Угловая скорость — ω, рад/с $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
	Ускорение — a, м/с^2 $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$	Угловое ускорение — ε, рад/с^2 $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Силовые	Сила — P, Н	Силовой момент — $M = Ph$, Нм
	Масса — m, кг	Геометрический момент инерции $J = \int r^2 dm$

2.6. Основные случаи приведения системы сил к равнодействующим силам и главным моментам

Векторная сумма заданных сил $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots + \vec{P}_n$ называется **главным вектором сил**. Эта величина является векторной равнодействующей заданных сил. Она приложена к точке приведения всех сил. Аналогично, суммарный момент (например, в заданной плоскости, см. рис. 2.10) называется **главным моментом сил**, действующих в этой плоскости.

Система сходящихся сил всегда приводится к одной равнодействующей и, соответственно, может быть выражена главным вектором сил. В общем случае, особенно в пространственной системе могут быть не сходящиеся силы (т.е. силы, линии действия которых не пересекаются в одной точке). К таким силам относятся параллельные векторы сил (см. рис. 2.9). Поэтому основные случаи приведения сил сводятся к следующим:

1) главный вектор сил (P) и главный момент (M) равны нулю — $P = 0$, $M = 0$; это случай полного равновесия тел (когда система тел сохраняет относительную неподвижность);

2) $P = 0$, а $M \neq 0$; под действием момента M происходит только вращение тела;

3) $M = 0$, но $P \neq 0$; в этом случае вращения нет и тело движется прямолинейно;

4) если силы и моменты действуют в параллельных плоскостях, то возможны два случая.

• Величины $M \neq 0$, $P \neq 0$, при этом главный вектор сил P перпендикулярен главному моменту ($\vec{M} \perp \vec{P}$). Такая система приводится к силовой паре (моменту) и силе (рис. 2.13). Вектор главного момента M выражается в виде перпендикулярного отрезка к плоскости действия пары сил и направлен так, чтобы с его конца было видно вращение, вызываемое силовой парой против часовой стрелки (см. рис. 2.13, *а*, *б*). Вектор M не зависит от выбора точки О, относительно которой вычисляется величина момента.

• Векторные величины M и P параллельны друг другу (см. рис. 2.13, *в*). Такая система называется **динамой**. Примером такой системы является процесс сверления, когда сверло прижимается к плоскости (действует главный вектор сил — P) и одновременно ему дается вращение (действует главный момент — M).

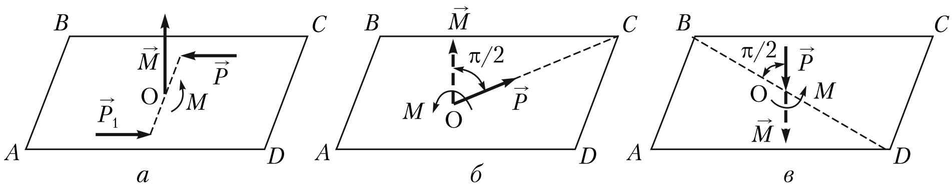

Рис. 2.13. **Главный вектор и главный момент сил**

Таким образом, *систему сил, как угодно расположенных в пространстве, можно заменить одной силой* (*приложенной в произвольно выбранной точке*) *и одной парой сил* (*с моментом М*).

Глава 3
ВАЖНЕЙШИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

Рассмотрим наиболее часто используемые в практике частные случаи уравнений (1.2)—(2.15).

3.1. Частные случаи основного уравнения динамики

Уравнение $P = \sum P_i = d(mV)/dt$ используется для решения задач динамики и кинематики поступательного движения. Частные случаи определяются условиями изменения величин, входящих в это уравнение.

Условие m = const. Равнодействующая сил в данном случае

$$P = m\frac{dV}{dt} = m\frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}, \quad \text{или} \quad \frac{P}{m} = \dot{V} = \ddot{S},$$

где величины с одной или двумя точками означают краткую запись первой или второй производных от этих величин по времени. При P = const, $\dot{V}$ = const $= a_0 = \ddot{S}$, или $S = \iint a_0 dt^2$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} &\text{путь} && S = \frac{a_0 t^2}{2} + V_0 t + S; \\ &\text{скорость} && V = a_0 t + V_0; \\ &\text{ускорение} && a = \text{const}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Это — **равноускоренное движение**, оно задается любым из этих трех уравнений.

Условие m = const, V = 0. Тогда

$$\sum P_i = 0. \tag{3.2}$$

Это — **уравнение статического равновесия**.

Если $a = 0$, то $V = V_0$ = const.

Это **уравнение равномерного движения**. Для него действительно уравнение (3.2). Таким образом, уравнения статики используются как для неподвижной системы, так и для системы, движущейся равномерно.

Условие $\sum P_i \neq$ const $= f(t)$, m = const. Получаем $\dfrac{f(t)}{m} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$, тогда

$$V = \frac{1}{m}\int f(t)dt; \;\; S = \frac{1}{m}\iint f(t)dt^2; \;\; a = \frac{f(t)}{m}. \tag{3.3}$$

3.2. Частные случаи основного уравнения для вращательного движения

Так как аналогом массы во вращательном движении является момент инерции — J, а силовым фактором силовой момент — M, то структура уравнений наиболее важных случаев вращательного движения будет аналогична вышеприведенным уравнениям (3.1)—(3.3).

При J = const из основного уравнения $M = d(J\omega)/dt$ получаем

$$\frac{M}{J} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{3.4}$$

Если главный момент M = const, $d\omega/dt = \varepsilon_0$ = const, то угловое перемещение

$$\varphi = \iint \varepsilon_0 dt^2; \quad \varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0. \tag{3.5}$$

Это **уравнения равноускоренного вращения**.

При ε = 0

$$\omega = \omega_0 = \text{const}. \tag{3.6}$$

Это **уравнения равномерного вращения**.

При $M \neq$ const для функции $M = f(t)$ из (3.4) получаем $\dfrac{f(t)}{J} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, откуда

$$\omega = \frac{1}{J}\int f(t)dt; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{f(t)}{J}; \quad \varphi = \frac{1}{J}\iint f(t)dt^2. \tag{3.7}$$

В соответствии с формулами (3.5)—(3.7) решаются задачи вращательного движения, аналогичные нижеприведенным примерам поступательного движения. Общая форма уравнения статического равновесия вращательного движения (уравнение статики) из (3.4) при ω = const

$$\sum M_i = 0. \tag{3.8}$$

3.3. Система общих уравнений динамики и статики в координатной системе

В реальном трехмерном пространстве положение любой точки (например, A) определяется тремя координатами x, y, z, т.е. расстояниями проекций точек (A', A'', A''') до соответствующих прямоугольных координат — осей (рис. 3.1).

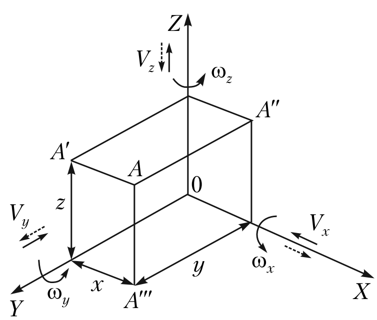

Рис. 3.1. **Скорости и угловые скорости в трехмерном пространстве**

Расстояние точки A до начала координат 0 (начала отсчета движения)

$$S_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Соответственно, в каждой из трех плоскостей

$$S_{xy} = \sqrt{x^2 + y^2};\ \ S_{xz} = \sqrt{x^2 + z^2};\ \ S_{zy} = \sqrt{y^2 + z^2}. \qquad (3.9)$$

Относительно каждой оси возможно движение тел вдоль нее (поступательное) и вокруг оси (вращательное). Таким образом, имеем в общем случае шесть возможных разновидностей движения (V_x, V_y, V_z, ω_x, ω_y, ω_z).

Отметим, что поступательные и вращательные движения можно сложить и получить в итоге сложное движение с одним вектором поступательного движения (постоянным или переменным) и соответственно вращательное движение. Тело в этом случае будет двигаться по естественной пространственной траектории. Использование трех координат — осей позволяет более наглядно решать практические задачи с разложением (часто искусственным) силовых или кинематических факторов на слагаемые.

Исходя из сказанного, в координатной системе отсчета получаем *не два* уже рассмотренных уравнения динамики (1.2), (2.15), а *шесть* уравнений

$$\sum P_x = \frac{d(mV_x)}{dt};\ \ \sum P_y = \frac{d(mV_y)}{dt};\ \ \sum P_z = \frac{d(mV_z)}{dt}; \qquad (3.10)$$

$$\sum M_x = \frac{d(J_x\omega_x)}{dt};\ \ \sum M_y = \frac{d(J_y\omega_y)}{dt};\ \ \sum M_z = \frac{d(J_z\omega_z)}{dt}. \qquad (3.11)$$

При этом равнодействующая

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad \text{и} \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

В плоском движении (в координатах $x - y$) уравнения (3.10) и (3.11) примут вид (при m = const и J = const)

$$\sum P_x = m\frac{dV_x}{dt};\ \ \sum P_y = m\frac{dV_y}{dt};\ \ \sum M_z = J_z\frac{d\omega}{dt}. \qquad (3.12)$$

3.4. Система уравнений пространственной статики

В частном случае, при V = const (a = 0) или ω = const (ε = 0) получаем систему уравнений пространственной статики

$$\begin{aligned} &\sum P_x = 0;\ \ \sum P_y = 0;\ \ \sum P_z = 0; \\ &\sum M_x = 0;\ \ \sum M_y = 0;\ \ \sum M_z = 0. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Уравнения статики выражают равновесие системы тел под действием приложенных к ней сил и моментов. В плоском движении имеем уже рассмотренные выше уравнения

$$\sum P_x = 0;\ \ \sum P_y = 0;\ \ \sum M_z = 0. \qquad (3.14)$$

Здесь $\sum M_z$ — сумма моментов относительно оси, перпендикулярной данной плоскости.

Глава 4
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА, УРАВНЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Уравнения статики применяются для определения реакций в опорах и усилий в отдельных элементах механической системы, находящейся в равновесии. Уравнения (3.12)—(3.14) означают отсутствие взаимного перемещения элементов системы (которая неподвижна или движется с постоянной скоростью).

С формальной точки зрения основное уравнение динамики (1.2) можно записать в виде уравнения равновесия, где сумма внешних сил $\sum P_i$:

$$\sum P_i + m\frac{dV}{dt} = 0.$$

Величина $m\dfrac{dV}{dt} = P_{и}$ называется **силой инерции**.

В координатах X, Y эти уравнения, где $P_{и}$ является одной из заданных сил (принцип Даламбера), имеют вид

$$\sum P_x + P_{иx} = 0; \quad \sum P_y + P_{иy} = 0; \quad \sum M_i + M_{и} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $M_{и} = -J\dfrac{d\omega}{dt}$ — **момент сил инерции**, $P_{иy}$, $P_{иx}$ — проекции сил инерции на оси координат. В пространственной системе уравнения равновесия Даламбера принимают вид:

$$\begin{aligned} &\sum P_x + P_{иx} = 0; \quad \sum M_x + M_{иx} = 0;\\ &\sum P_y + P_{иy} = 0; \quad \sum M_y + M_{иy} = 0;\\ &\sum P_z + P_{иz} = 0; \quad \sum M_z + M_{иz} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Если же инерционные силы и моменты равны нулю, то эти уравнения принимают вид уравнений статики (3.12). Величины $M_{иx}$, $M_{иy}$, $M_{иz}$ — моменты инерционных сил вращательного движения относительно осей X, Y, Z.

4.1. Практическое использование уравнений статики

Отметим, что принцип Даламбера является только формальным приемом и не отвечает в строгой форме условиям статики. Рассмотрим примеры использования уравнений статического равновесия.

Пример: балка лежит на двух опорах. Шарнирная опора A неподвижна, опора B — на катках (не воспринимает горизонтальную нагрузку). Длина балки AB = 5 м. На балку действует равномерно распределенная нагрузка

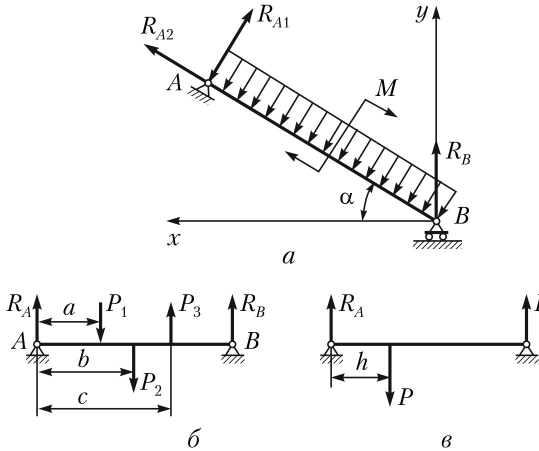

Рис. 4.1. **Балка на двух опорах**

от сил тяжести p = 200 Н/м и пара сил M = 1000 Нм, угол $\alpha = 30°$ (рис. 4.1). Определить величины реакций балки в опорах A и B.

Решение. Для направления реакций используем указания в гл. 6. Общая силовая нагрузка $|\vec{P}| = |p\overrightarrow{AB}| = 200 \cdot 5 = 1000$ (Н) (показана пунктиром). Составим уравнения статики

$$\sum P_x = -R_{A1}\sin\alpha + R_{A2}\cos\alpha = 0,$$

откуда $R_{A2} = R_{A1}\operatorname{tg}\alpha$,

$$\sum P_y = R_B - P + R_{A1}\cos\alpha + R_{A2}\sin\alpha = 0,$$

откуда $R_B = P - R_{A1}\cos\alpha - R_{A2}\sin\alpha = P - R_{A1}(\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha)$.

$$\sum M_B = -M - R_{A1}AB + Ph; \quad h = \frac{AB\cos\alpha}{2} = \frac{5}{2}\cos 30° \approx 2{,}16 \text{ (м)}.$$

Отсюда

$$R_{A1} = \frac{Ph - M}{AB} = \frac{1000 \cdot 2{,}16 - 1000}{5} = 232 \text{ (Н)};$$

$$R_{A2} = R_{A1}\operatorname{tg}30° = \frac{232}{\sqrt{3}} \approx 1{,}34 \text{ (Н)};$$

$$R_B = 1000 - 232 \cdot \cos 30° - 134 \cdot \sin 30° = 1000 - \frac{232\sqrt{3}}{2} - 134 \cdot \frac{1}{2} = 731 \text{ (Н)}.$$

Пример: нахождение равнодействующей сил. Необходимо определить равнодействующую параллельных сил P_1, P_2, P_3 (см. рис. 4.1, *б*), действующих на балку AB, точку ее приложения и опорные реакции. Величины сил P_1 = 500 Н, P_2 = 300 Н, P_3 = 400 Н, длина AB = 10 м, a = 2 м, b = 3 м, c = 4 м.

Решение. Равнодействующая сила $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 - \vec{P}_3$.

Ввиду их параллельности P = 500 + 300 – 400 = 400 Н. Точка ее приложения найдется из условия равновесия: момент относительно точки A равнодействующей P ($-M_P$) равен сумме моментов от заданных трех сил

$$\sum M_A = M_P - (M_1 + M_2 + M_3) = 0 \quad \text{или} \quad M_P = M_1 + M_2 + M_3.$$