

И.И. ВУЛЬФСОН • КРАТКИЙ КУРС ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

И.И. ВУЛЬФСОН

И.И. Вульфсон

КРАТКИЙ КУРС  
ТЕОРИИ МЕХАНИЧЕСКИХ  
КОЛЕБАНИЙ

---

---

Москва  
2017

И.И. Вульфсон

**КРАТКИЙ КУРС  
ТЕОРИИ  
МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

---

---



МОСКВА

2017

УДК 621+534.1  
ББК 34.41  
В 88

Р е ц е н з е н т ы:

*В.Л. Крупенин* – доктор технических наук, академик РАЕН,  
*Г.Я. Пановко* – доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ.

В 88

**Вульфсон И. И.** Краткий курс теории механических колебаний / И. И. Вульфсон—  
Библиотека ВНТР. — М.: ВНТР, 2017. — 241 с.

В этом учебном пособии традиционный курс теории колебаний дополнен основными сведениями о принципах построения динамических моделей механизмов и приводов машин, их математическом описании и методах расчета типовых колебательных режимов. В лаконичной форме изложены способы виброзащиты и методы рационального динамического синтеза механизмов и приводов машин с учетом инерционных и упругодиссипативных характеристик. Рассмотрен ряд специальных задач повышенной сложности, возникающих при инженерных расчетах и проектировании механизмов, образующих колебательные системы с нестационарными и нелинейными связями.

Предназначено для студентов вузов и может быть полезным при подготовке бакалавров, магистров и аспирантов соответствующих специальностей, а также для инженеров и слушателей факультета повышения квалификации преподавателей по теории механизмов и машин

Печатается в авторской редакции.

Рис.: 99. Библиогр.: 26 назв.

DOI: 10.18411/a-2017-012

**Опубликовано по решению редколлегии журнала. Представлено  
автором.**

УДК 621+534.1  
ББК 34.41

© Вульфсон И.И., 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	7
<b>Введение</b> .....	9
<b>Раздел I. Типовые задачи колебаний в машинах и методы их решения</b> . . .	12
<b>Глава 1. Общие сведения о механических колебаниях</b> .....	12
1.1. Основные цели изучения колебаний в машинах . . . . .	12
1.2. Основные этапы динамического расчета . . . . .	13
1.3. Классификация механических колебаний . . . . .	15
<b>Глава 2. Динамическая модель</b> .....	18
2.1. Исходные предпосылки и принципы при составлении динамической модели .....	18
2.2. Приведение инерционных характеристик .....	22
2.3. Характеристики упругих элементов и их приведение .....	24
2.4. Параметры диссипации и их приведение .....	27
2.5. Программное движение звеньев механизмов .....	32
<b>Глава 3. Математическая модель</b> .....	37
3.1. Некоторые сведения из аналитической механики применительно к задачам колебаний механизмов и машин .....	37
3.2. Составление систем дифференциальных уравнений на базе уравнений Лагранжа второго рода и квадратичных форм .....	43
3.3. Составление систем дифференциальных уравнений с помощью обратного способа .....	47
3.4. Электромеханические аналогии .....	50
<b>Глава 4. Свободные колебания линейных систем</b> .....	53
4.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы . . . .	53
4.2. Влияние линейной силы сопротивления на свободные колебания .....	50
4.3. Влияние постоянной силы сопротивления на свободные колебания .....	57
4.4. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы . . .	59
4.5. Определение собственных частот и форм изгибных колеба-	

баний системы с двумя степенями свободы . . . . .	63
4.6. Определение собственных частот и форм колебаний систем с конечным числом степеней свободы . . . . .	64
4.7. Оценка низшей собственной частоты с помощью метода Данкерлея (Dunkerley) . . . . .	65
4.8. Позиционные и циклические координаты . . . . .	
4.9. Нормальные (главные) координаты . . . . .	67
4.10. Определение собственных частот и форм крутильных колебаний систем с распределенными параметрами . . . . .	70
4.11. Определение собственных частот и форм изгибных колебаний систем с распределенными параметрами . . . . .	73
<b>Глава 5. Вынужденные колебания линейных систем . . . . .</b>	<b>77</b>
5.1. Построение общего решения при произвольной вынуждающей силе . . . . .	77
5.2. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при гармонической вынуждающей силе . . . . .	78
5.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при гармонической вынуждающей силе и линейной силе сопротивления . . . . .	80
5.4. Исследование амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик (АЧХ, ФЧХ) . . . . .	81
5.5. Кинематическое возмущение . . . . .	83
5.6. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы при гармонической вынуждающей силе . . . . .	85
5.7. Вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы при гармонической вынуждающей силе . . . . .	87
5.8. Расчет вынужденных колебаний при периодической вынуждающей силе с помощью метода гармонического анализа . . . . .	90
5.9. Расчет вынужденных колебаний при периодической вынуждающей силе на базе замкнутой формы решения . . . . .	92
5.10. Вынужденные колебания привода при учете динамической характеристики электродвигателя . . . . .	94
5.11. Вынужденные колебания систем с распределенными параметрами . . . . .	97
5.12. Критические скорости валов. Самоцентрирование . . . . .	99
5.13. Использование условий энергетического баланса при анализе колебательных процессов . . . . .	101
5.14. Отображение колебательных процессов на фазовой плоскости . . . . .	105

<b>Глава 6. Виброзащита</b> . . . . .	107
6.1. Общие сведения о способах виброзащиты . . . . .	107
6.2. Учет колебаний при выборе закона движения толкателя кулачкового механизма . . . . .	108
6.3. Рациональный выбор параметров системы при гармоническом возбуждении . . . . .	116
6.4. Виброизоляция . . . . .	117
6.5. Динамическое гашение . . . . .	121
6.6. Динамическая разгрузка . . . . .	123
6.7. Синтез колебательных систем с квазипостоянными амплитудно-частотными характеристиками . . . . .	126
<b>Глава 7. Параметрические колебания</b> . . . . .	130
7.1. Простейшие динамические модели с переменными параметрами . . . . .	130
7.2. Приближенное решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами методом условного осциллятора . . . . .	133
7.3. Параметрический резонанс и его подавление . . . . .	136
7.4. Особенности свободных колебаний при медленном изменении параметров . . . . .	142
<b>Глава 8. Краткие сведения о нелинейных колебаниях</b> . . . . .	145
8.1. Общие сведения о динамических задачах в нелинейной постановке и методах их решения . . . . .	145
8.2. Дельта–метод . . . . .	147
8.3. Метод гармонической линеаризации . . . . .	149
8.4. Вынужденные нелинейные колебания . . . . .	152
8.5. Общие сведения об автоколебаниях . . . . .	160
8.6. Фрикционные автоколебания . . . . .	163
<b>Раздел II. Избранные задачи повышенной сложности</b> . . . . .	173
<b>Глава 9. Учет нелинейных диссипативных сил при решении задач динамики машин</b> . . . . .	173
9.1. Учет нелинейных диссипативных сил при моногармонических колебаниях . . . . .	173
9.2. Учет нелинейных сил при неоднородных колебаниях . . . . .	178

<b>Глава 10.</b> Матричные методы расчета колебаний приводов разветвленной структуры . . . . .	188
10.1. Модифицированные матрицы перехода . . . . .	188
10.2. Определение частот свободных колебаний и нестационарных коэффициентов форм . . . . .	193
10.3. Вынужденные колебания . . . . .	198
10.4. Приводы, образующие колебательные системы регулярной структуры . . . . .	201
10.5. Расчет колебаний на базе континуальных моделей . . . . .	208
10.6. Использование матриц перехода при исследовании колебаний приводов машин с учетом диссипативных сил . . . . .	214
<b>Глава 11.</b> Зазоры . . . . .	219
11.1. Динамические эффекты и математическое описание . . . . .	219
11.2. Возбуждение колебаний при ударном характере взаимодействия элементов кинематических пар . . . . .	220
11.3. Условия кинематического контакта в шарнирах рычажных механизмов . . . . .	225
Основные термины . . . . .	230
Вопросы для самоконтроля . . . . .	235
Список литературы . . . . .	238

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Это учебное пособие написано по материалам лекций, которые автор читает студентам факультета информационных технологий и машиноведения Санкт-Петербургского государственного университета промышленной технологии и дизайна и частично нашел отражение в книге [4]. В несколько расширенном виде этот курс в течение нескольких десятилетий также читался слушателям факультетов повышения квалификации преподавателей при Санкт-Петербургском государственном политехническом университете и в ряде других вузах страны.

Теории механических колебаний и ее приложениям в области динамики машин посвящено много монографий, а также учебных пособий, рассчитанных в основном на большой объем лекционного курса и практических занятий. Между тем опыт преподавания показывает, что пользование такими пособиями при малом объеме курса вызывает у студентов определенные трудности, возникающих как при отборе материала, который отвечает наиболее важным разделам, так и из-за сопутствующей этому отбору отрывочности, нарушающей целостное восприятие предмета.

Излагаемый курс носит в основном вводный характер и, по нашему мнению, должен облегчить дальнейшее углубление знаний в этой области, а также изучение специальных дисциплин на профилирующих кафедрах. Вместе с тем ряд рассмотренных задач и методов их решения выходит за рамки предварительных сведений о данной дисциплине.

Особенностью данного курса является его инженерная направленность. Это проявилось в стремлении акцентировать внимание на физической сущности колебательных явлений и приложении основополагающих сведений из теории колебаний к задачам машиноведения с целью снижения виброактивности механизмов и машин. Поэтому в определенном смысле данный курс является естественным продолжением курса теории механизмов и машин.

Имея в виду оснащение современной вычислительной техникой кафедр, лабораторий, конструкторских бюро, повышенное внимание уделяется схематизации механизмов и приводов машин, их математическому описанию, а также использованию ЭВМ при инженерных расчетах типовых колебательных режимов.

Учебное пособие состоит из двух разделов. Первый раздел, посвященный методам решения типовых задач колебаний в машинах, содержит восемь глав.

В первой главе, носящей вводный характер, дается представление о месте колебаний в общей проблеме динамики машин и приводится классификация колебательных явлений по ряду определяющих признаков.

Вторая и третья главы посвящены схематизации механизмов и приводов машин и методам их математического описания.

В четвертой и пятой главах излагаются способы определения собственных частот и форм свободных колебаний и методы расчета вынужденных колебаний для типовых случаев возмущения.

Шестая глава посвящена способам виброзащиты. При этом наряду с традиционными способами определенное внимание уделяется специфике задач, связанных с повышением динамической точности механизмов циклового действия, широко распространенных в машинах текстильной, легкой, полиграфической, пищевой и ряда других отраслей промышленности.

В седьмой и восьмой главах в краткой форме даются основные сведения о параметрических и нелинейных колебаниях.

Перечисленные выше восемь глав, вошедших в первый раздел учебного пособия, во втором разделе дополнены за счет более углубленного изложения ряда вопросов, устанавливающих связь курса теории колебаний с курсом теории механизмов и машин. Этот раздел «Избранные задачи повышенной сложности» обращен к аспирантам, магистрам, слушателям факультетов повышения квалификации преподавателей по теории механизмов и машин, а также может быть полезен при выполнении научных работ в рамках студенческого научного общества (СНО).

В трех главах этого раздела рассмотрены многие важные современные задачи колебаний приводов машин, связанные с математическим описанием нелинейных диссипативных сил, зазоров и использованием аппарата матриц перехода, приспособленного к возможностям современной компьютерной техники.

## ВВЕДЕНИЕ

С колебательными процессами человеку приходится сталкиваться на каждом шагу. На первый взгляд кажется, что с физической точки зрения причина возникновения колебаний очевидна: что-то заставляет какую-то характеристику рассматриваемого объекта то увеличиваться, то уменьшаться. Так, например, если мы раскачиваем качели, стоя на земле, то не удивительно, что они совершают колебательное движение. Однако, даже в этом простом примере остается не ясным, почему нам удастся раскачаться, находясь непосредственно на качелях. Аналогичные вопросы возникают, если задуматься, почему ходят часы, почему бьется с определенной частотой сердце, почему река, текущая с постоянной скоростью, может в конечном итоге «давать» переменный ток, почему при равномерном движении смычка по струне возникают звуковые колебания. Ответ на подобные вопросы дает дисциплина «Теория колебаний».

Обычно научные дисциплины, реализуемые в учебном процессе, соответствуют разделам физики, таким как механика, оптика, тепловые процессы, электричество и т. п. С колебаниями дело обстоит иначе, так как различные виды колебаний имеют совершенно разную физическую природу и объединяются лишь единством их математического описания. Естественно, что при таком широком взгляде на проблему не удастся в рамках одного учебного предмета отразить специфику колебательных явлений в каждом из рассматриваемых областей техники. В связи с этим курс теории колебаний распадается на ряд ответвлений. В данном учебном пособии речь идет о механических колебаниях, называемых вибрациями.

Механические колебания – это процесс изменения какой-либо физической величины (в данном случае – координаты, скорости, силы, момента) во времени, при котором имеет место ее попеременное увеличение и уменьшение. В одних случаях колебания вредны, в других – они приносят пользу и целенаправленно применяются в современной технике.

Из вышеизложенного ясно, что создание современных машин немислимо без учета колебательных процессов, во многом определяющих производительность машин, качество продукции, долговечность и надежность оборудования, условия труда человека-оператора. Этим нередко оправдывается взаимосвязь понятий «механические колебания» и «машиноведение» и их рассмотрение в рамках одной учебной дисциплины.

Машинами называют системы, предназначенные для осуществления механических движений и силовых воздействий для выполнения требуемых технологических и транспортных операций. Различают технологические машины

(например, металлорежущие станки, машины текстильной, легкой, пищевой, полиграфической и других отраслей промышленности) и транспортные машины (автомобили, самолеты, конвейеры, подъемные краны и т. п.). Кроме того, существуют энергетические машины, в которых осуществляется преобразование энергии. Этот класс машин, в которых колебания имеют не только механическую природу, в данном учебном пособии не рассматривается.

Каждая современная машина состоит из нескольких функциональных частей (подсистем), а именно – двигателя, механической системы машины и системы управления движением. Механическим колебаниям в первую очередь подвержены элементы механической системы машины, в которой осуществляется преобразование сравнительно простых движений входных звеньев в сложные движения исполнительных органов, требуемых для выполнения заданных технологических и транспортных операций.

Одной из важных современных задач является интенсификация производственных процессов, которой в конечном итоге сопутствует рост рабочих скоростей. Это, в свою очередь, приводит к необходимости более глубокого и разнообразного учета динамических факторов. Выявилось, что игнорирование упругих свойств элементов машин и возбуждаемых колебаний может привести не только к ухудшению эксплуатационных характеристик машин, но и к серьезным авариям. Часто колебания создают прямую угрозу прочности весьма ответственных конструкций, таких как валопроводы, механизмы, винты самолетов и вертолетов, фундаменты и др. .

Нередко колебания приводят к существенным искажениям заданных функций программного движения рабочих органов, к нарушениям точностных требований при обработке изделий и других условий нормальной эксплуатации оборудования. Кроме того, колебания могут оказать вредное физиологическое воздействие на обслуживающий персонал, подверженный длительным вибрациям. Наглядным результатом подобного воздействия является так называемая вибрационная болезнь, нередко наблюдаемая у лиц, работающих с пневмоинструментом вибрационного типа, у механизаторов сельского хозяйства и др.

С другой стороны, с каждым годом в технике и в медицине все шире применяются различные эффекты, основанные на использовании специально возбуждаемых вибраций. Эта развивающаяся ветвь прикладной теории механических колебаний в последнее время выделилась в самостоятельное направление «Вибрационная механика» [ 1\* ] .

Как показывает опыт, решение научных и инженерных задач динамики машин связано с преодолением определенных иллюзий. Нередко решение задач динамики машин базируется на допущении классической теории механизмов о недеформируемости звеньев. Между тем практика эксплуатации машин свидетельствует о том, что при современных рабочих скоростях это допущение оказывается приемлемым лишь в первом приближении, а в ряде случаев – даже

приводит к неверной ориентации при анализе сложных динамических процессов и выборе направлений дальнейшего совершенствования машины.

Другая иллюзия связана с преувеличенной верой во всемогущество современной вычислительной техники. Иногда кажется, что достаточно задать в виде модели систему сколь угодно большой сложности, а остальное сделает ЭВМ. При этом способность компьютера «переварить» исходную информацию и выдать какой-либо результат воспринимается как получение «точного» решения задачи. При столь формальном подходе к делу инженера подстерегает много опасностей. Помимо возможных ошибок опасность здесь таится еще и в том, что у инженера, не выходящего по своим знаниям динамики за рамки пользования программ, нередко теряется способность сомневаться и притупляется чувство ответственности.

Коротко остановимся на месте данного курса среди других общенаучных и общепрофессиональных дисциплин. В разделе «динамика» курса «теоретическая механика» рассматриваются задачи определения сил, возникающих при движении, и движения, возникающего под действием сил, без учета упругих свойств элементов системы. В курсе сопротивления материалов изучаются упругие деформации, возникающие при статическом приложении сил. В традиционном курсе «теория механизмов и машин» прикладные задачи механики обычно рассматриваются с учетом особенностей механизмов и машин, однако без учета упругости звеньев. Наконец, в рассматриваемом курсе устраняются ограничения, заложенные в моделях, изучаемых в упомянутых выше учебных дисциплинах, в результате чего обнаруживаются новые динамические эффекты и средства, способствующие повышению технических и эксплуатационных характеристик машинного оборудования.

Отметим, что в данном учебном пособии многие традиционные типовые задачи изложены с инженерных позиций. При этом особое внимание уделено физическому смыслу описываемых явлений и методам виброзащиты. Кроме того, в пособии рассматривается ряд новых задач, относящихся к развивающимся направлениям динамики машин и механизмов.

## РАЗДЕЛ I

# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ В МАШИНАХ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

## ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

### 1.1. Основные цели изучения колебаний в машинах

Развитие современного машинного оборудования ставит перед инженером много сложных проблем. Одна из них непосредственно вытекает из тенденции к интенсификации технологических и транспортных операций, что, в свою очередь, обуславливает повышение рабочих скоростей, рост динамических нагрузок и повышение уровня колебаний (вибраций).

Под термином "колебания" понимают попеременное возрастание и убывание физической величины или ее производной. Если речь идет о механических колебаниях, то такими величинами являются координата, скорость, сила (или момент).

Предметом теории колебаний является изучение общих закономерностей колебательных процессов и разработка методов их исследования на базе законов механики, современного математического аппарата и результатов эксперимента.

Изучение колебаний в машинах преследует следующие цели:

1. Устранение аварийных режимов, возникающих из-за резонансных явлений или усталостного разрушения элементов конструкций.

2. Обеспечение нормальных условий функционирования механизмов, приборов, средств автоматизации и другого оборудования. Применительно к технологическим машинам, в которых широко используются исполнительные органы, перемещающиеся по сложным законам движения, особо следует выделить задачу воспроизведения кинематических характеристик, точность которых существенным образом зависит от колебаний.

3. Решение экологических проблем, сопутствующих работе машины с целью надежной защиты обслуживающего персонала от вибраций и шума. В табл.1.1 приведены данные, иллюстрирующие степень влияния колебаний на организм человека.

4. Использование колебательных процессов для реализации технологических и транспортных операций. В качестве примеров приведем виброинструмент, вибрационное транспортирование деталей, вибрационное погружение свай, вибрационное разделение сыпучих смесей и др.

Таблица 1.1

**Воздействие вибраций на человека**

Реакция организма человека на колебания	Ускорения, мм/с <sup>2</sup> (частота 1-10 Гц)	Скорость, мм/с (частота 10-100 Гц)
Не ощутимы	10	0,16
Слабо ощутимы	40	0,64
Хорошо ощутимы	125	2
Сильно ощутимы	400	6,4
Вредны при длительном воздействии	1000	16
Безусловно вредны	Более 1000	Более 16

**1.2. Основные этапы динамического расчета**

На рис.1.1 приведена структурная схема динамического расчета *физического объекта (ФО)*, в качестве которого выступает исследуемая машина, механизм или процесс. Даже при современном уровне развития механики машин и вычислительной техники полное описание динамического поведения объекта не представляется возможным, как, впрочем, и необходимым. Поэтому *первый этап* динамического расчета связан с разумным упрощением объекта, т.е. его подменой некоторой схемой или динамической моделью, в которой стремятся отобразить наиболее существенные факторы рассматриваемой задачи. Итак, *динамическая модель (ДМ)* – это *идеализированное отображение рассматриваемой системы при ее теоретическом исследовании и инженерных расчетах с учетом цели и особенностей поставленной задачи*. Поскольку таких задач может быть много, одному объекту может отвечать целый ряд динамических моделей (подробнее см. п.2.1).

*Второй этап* состоит в построении так называемой *математической модели (ММ)*, т.е. в математическом описании динамической модели. Под этим термином понимают систему уравнений, при составлении которых используются законы механики, а в случае необходимости и экспериментальные данные (например, при описании сил сопротивления различной физической природы). При составлении модели иногда приходится также привлекать на помощь некоторые гипотезы и допущения для компенсации недостатка знаний или с целью упрощения дальнейшего анализа.

*Третьим этапом* динамического расчета является *решение уравнений*. На этом этапе используются как аналитические методы, дающие четкую качественную картину и достоверные инженерные оценки, так и численные методы, опирающиеся на большие возможности современной вычислительной техники. Большой перспективностью обладают численно-аналитические методы, основанные на разумном совмещении обоих методов.

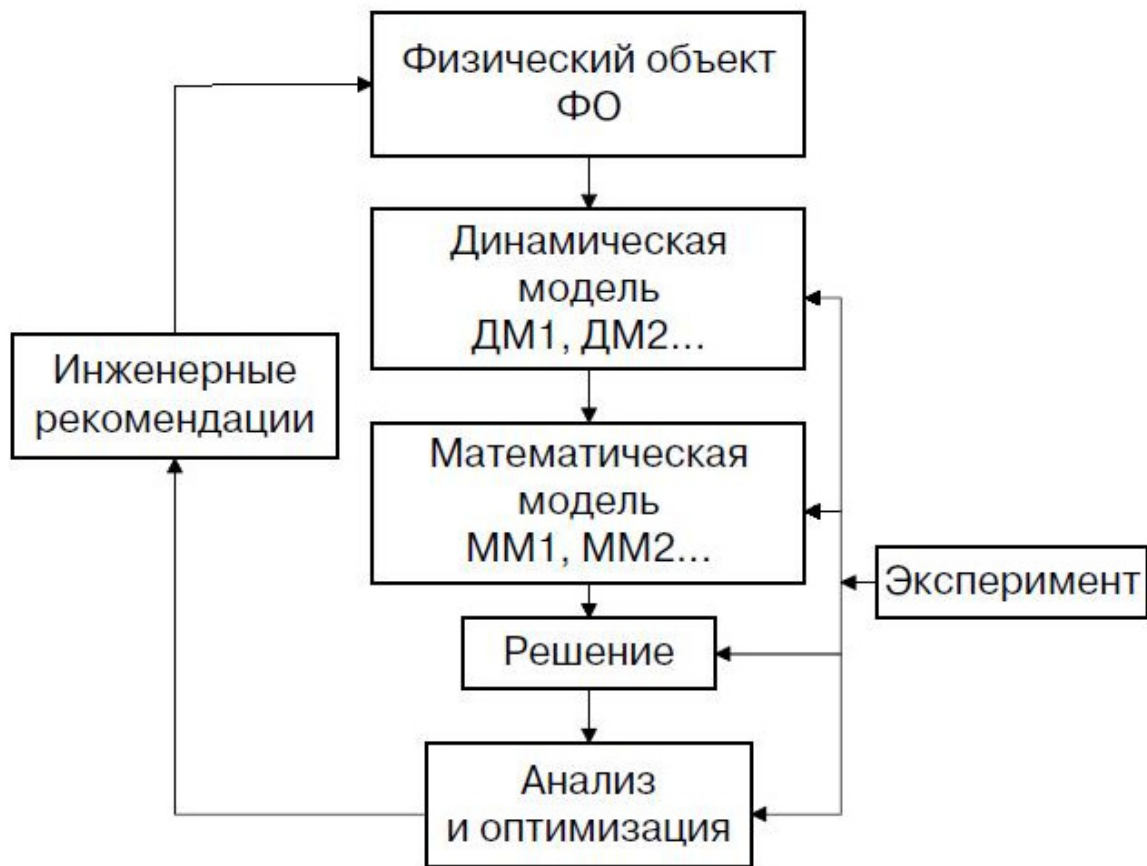


Рис.1.1

**Четвертым этапом** является **анализ** полученных решений с позиций поставленной инженерной задачи. На базе анализа нередко удается сформулировать **оптимизационную задачу**. Применительно к колебательным системам машин эта задача представляет интерес с целью снижения виброактивности механизмов или более эффективного использования колебаний в технологическом процессе. На основании четвертого этапа расчета могут быть сделаны **инженерные рекомендации** по выбору параметров машины или коррекция исходных значений параметров.

В зависимости от цели и степени ответственности динамического расчета перечисленные этапы могут быть выполнены на разном уровне как в отношении выбранных динамических моделей и методов их исследования, так и точности самих расчетов. Разумеется, при этом также должна быть принята во внимание степень достоверности исходной информации.

Наряду с теоретическими методами анализа колебаний в машинах нередко приходится прибегать к **эксперименту**. При экспериментировании обнаруживаются новые явления, проверяются некоторые гипотезы и допущения, а иногда и новая теория. Наряду с натурными опытами непосредственно на

изучаемой машине при проектировании некоторых наиболее ответственных механизмов применяется физическое моделирование, осуществляемое на специально созданных экспериментальных установках. Поскольку широкое варьирование параметрами и структурой системы связано с большой трудоемкостью и существенными затратами, эксперимент должен опираться на предварительные результаты теоретического исследования. При этом особая роль принадлежит проверке принятой динамической модели.

### 1.3. Классификация механических колебаний

#### 1. Классификация по кинематическим признакам

**Периодические (установившиеся) колебания**, при которых состояние системы повторяется через равные промежутки времени, называемые периодом колебаний  $\tau$  (рис. 1.2,а). Состояние системы характеризуется обобщенными координатами и их первыми производными – обобщенными скоростями.

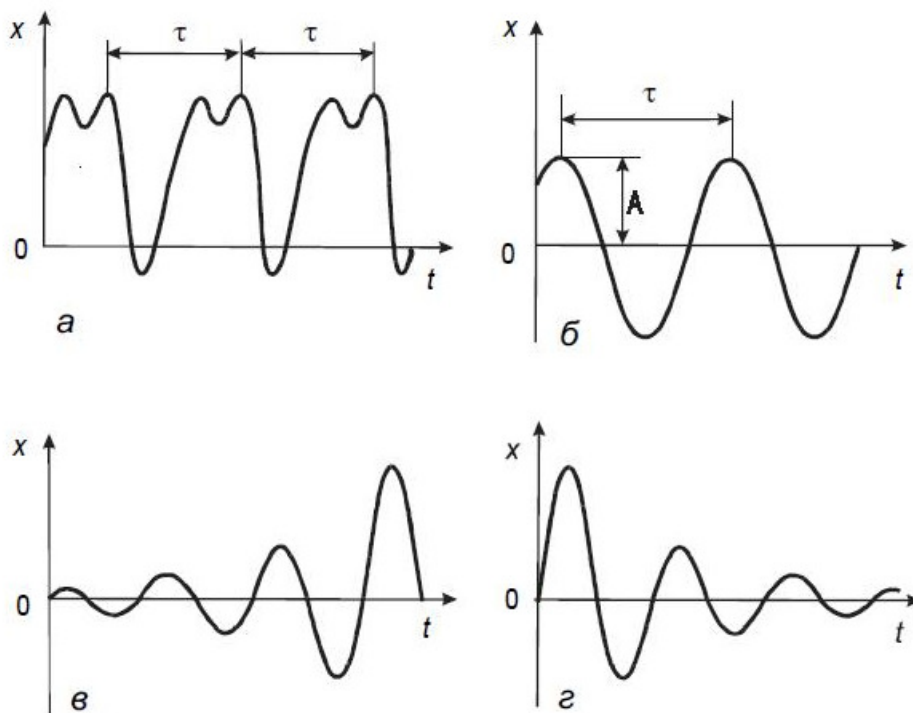


Рис.1.2

Весьма распространенным частным случаем периодических колебаний являются *гармонические колебания*, при которых обобщенная координата или ее производная изменяется пропорционально синусу (косинусу) с аргументом, линейно зависящим от времени (рис. 1.2,б).

$$q = A \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $A$  – амплитуда колебаний, т.е. наибольшее отклонение гармонического колебательного процесса от среднего значения;  $\varphi = \omega t + \alpha$  – фаза колебаний;  $\alpha = \varphi(0)$  – начальная фаза;  $\omega = d\varphi/dt$  – круговая частота.

Круговая частота измеряется в  $\text{с}^{-1}$  и связана с периодом колебаний  $\tau$  соотношением  $\omega = 2\pi/\tau$ . (Слово "круговая" нередко опускается). Кроме того частота может измеряться в герцах (Гц), т.е. числом колебаний в секунду  $\nu = 1/\tau$ . Очевидно, что  $\nu = \omega/(2\pi)$ .

**Нарастающие колебания** (*раскачка*), при которых экстремальные отклонения от среднего значения являются возрастающей функцией (рис. 1.2,в).

**Затухающие колебания**, при которых экстремальные отклонения от среднего значения являются убывающей функцией (рис. 1.2,г).

Нередко нарастающие и затухающие колебания соответствуют режимам с неполной (частичной) периодичностью, когда отличающиеся по величине экстремумы имеют место через равные промежутки времени.

## 2. Классификация по виду возмущения

**Свободные колебания** – колебания, происходящие без переменного внешнего воздействия и поступления энергии извне. При свободных колебаниях энергия подводится лишь в начальный момент времени за счет так называемых начальных условий – начального отклонения от положения равновесия и начальной скорости (рис.1.3,а).

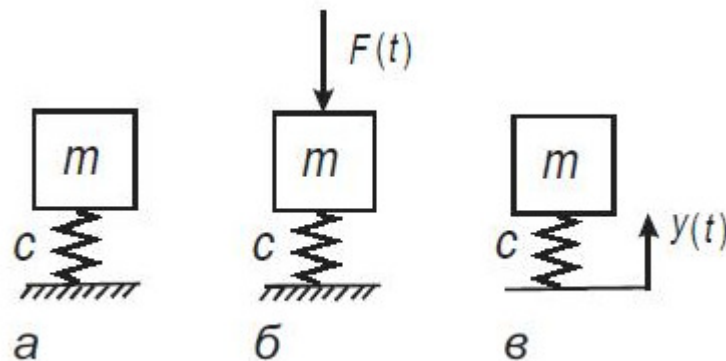


Рис.1.3

**Вынужденные колебания**, вызванные и поддерживаемые силовым или кинематическим возбуждением. При **силовом возбуждении** к системе приложена внешняя сила или момент, зависящие от времени (рис.1.3,б). При **кинематическом возбуждении** какая-либо точка или сечение системы принудительно перемещается по заданному закону движения (рис.1.3,в).

**Параметрические колебания**, вызванные и поддерживаемые изменением во времени одного или нескольких параметров системы (приведенной массы,

приведенного момента инерции, коэффициента жесткости, приведенной длины и т.п.). Так, например, раскачку качелей можно рассматривать как параметрические колебания, которые вызваны переменной длиной маятника, равной расстоянию от оси подвеса до центра масс.

**Автоколебания** – установившиеся колебания, регулируемые движением самой системы, которые возникают при неколебательном источнике энергии (или при источнике энергии, частота которого сильно отличается от частоты автоколебаний).

Известным техническим примером автоколебаний служит паровая машина, в которой постоянное давление пара вызывает возвратно-поступательное движение поршня. Другим примером являются автоколебания сердца с частотой, несоизмеримой с частотой приема пищи, т.е. источника энергии.

### ***3.Классификация по виду деформаций***

***Продольные колебания*** (деформации: растяжение, сжатие) .

***Крутильные колебания*** (деформация: кручение).

***Изгибные колебания*** (деформация: изгиб).

### ***4.Классификация по виду динамической модели (ДМ)***

Динамические модели с ***распределенными параметрами*** (см.п.2.1).

Динамические модели с ***сосредоточенными параметрами*** (см.п.2.1).

### ***5.Классификация по виду математической модели (ММ)***

***Линейные колебания***, описываемые линейными дифференциальными уравнениями.

***Нелинейные колебания***, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

## ГЛАВА 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### 2.1. Исходные предпосылки и принципы при составлении динамической модели

Как уже отмечалось в п. 1.2, изучение динамических процессов, происходящих в машине, должно начинаться с составления так называемой динамической модели, адекватной этим процессам, т.е. пригодной для описания тех их свойств и особенностей, которые соответствуют цели исследования. Динамическая модель складывается из динамических моделей ее функциональных частей: источника энергии (двигателя) и механической системы. В свою очередь, динамическая модель механической системы состоит из динамических моделей, входящих в нее механизмов. Простейшей динамической моделью является механизм с абсолютно жесткими звеньями (кинетостатическая модель), рассмотренный в курсе теории механизмов и машин. Эта модель, однако, не позволяет определить деформационные ошибки законов движения и исследовать упругие колебания элементов механизмов, нередко приводящие к нарушению заданной точности, повышенному износу и разрушению.

При учете деформируемости звеньев динамическую модель механизма обычно называют механизмом с упругими звеньями. При этом полагают, что звенья являются упругими телами, подчиняющимися закону Гука. Это означает, что после снятия нагрузки, вызвавшей деформацию, восстанавливается исходное недеформированное состояние.

Важной характеристикой динамической модели является число степеней свободы, т.е. число независимых (обобщенных) координат, однозначно определяющих положение системы. Поскольку каждое звено может быть представлено как совокупность бесконечного числа масс, связанных между собой элементарными «пружинками», любой механизм с упругими звеньями имеет бесконечное число степеней свободы. При схематизации исследуемого объекта это можно отразить, если воспользоваться динамическими моделями с распределенными параметрами, которые описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Обычно этот тип моделей в практике используется для ограниченного числа относительно простых (хотя и весьма распространенных) элементов: стержней, валов, балок, пластин, оболочек и т.п. Анализ привода машины на базе только таких моделей не представляется возможным, как, впрочем, и необходимым. Поэтому в инженерных расчетах большое распространение получили динамические модели с сосредоточенными, т.е. дискретно заданными параметрами, в которых число степеней свободы конечно. При построении таких моделей исходят из следующих принципов.

1. Инерционные свойства системы отображаются массами или моментами инерции, которые сосредоточены в отдельных точках или сечениях.

2. Эти точки или сечения соединены между собой упругими, диссипатив-

ными и геометрическими (или кинематическими) связями, лишенными инерционных свойств.

Использованный здесь термин «диссипативные», связанный с английским глаголом «to dissipate» – рассеивать, растрачивать, указывает на наличие сил сопротивления, вызывающих рассеяние механической энергии, т.е. частичный ее переход в другие виды энергии.

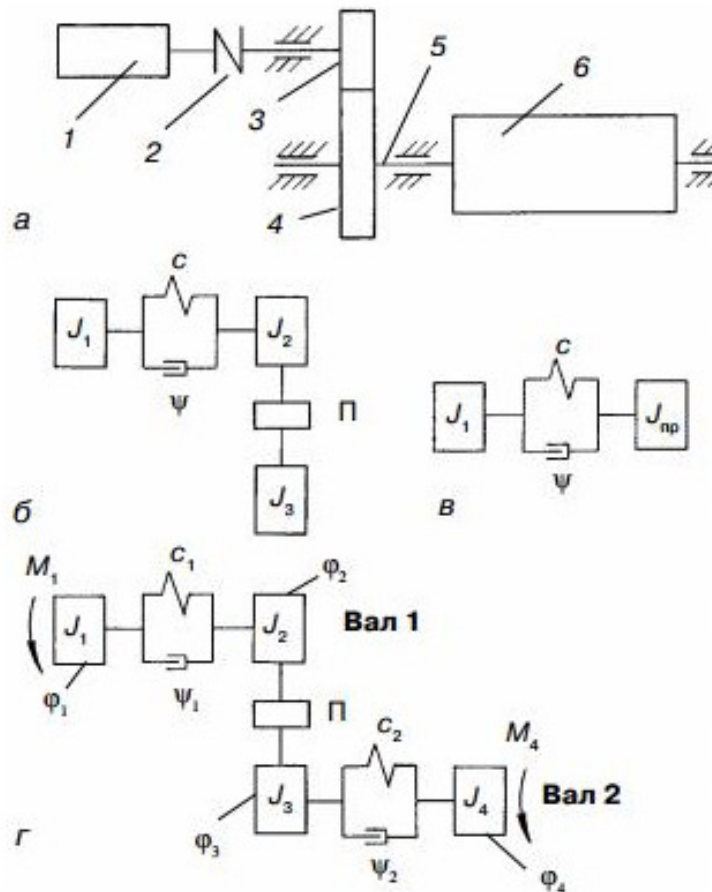


Рис.2.1

Применение этих принципов сводится к тому, что в приводе машины и в механизмах выделяются наиболее массивные элементы и наиболее податливые (т.е. наименее жесткие) участки кинематической цепи.

Рассмотрим схему привода (рис. 2.1,а), который состоит из двигателя 1, упругой муфты 2, зубчатой передачи 3-4, приводящей во вращение вал 5 с барабаном 6. Если все звенья считать абсолютно жесткими, то число степеней свободы этого привода равно единице. Таковую модель назовем кинетостатической. В этом случае число степеней свободы совпадает с так называемой степенью подвижности, используемой в курсе теории механизмов и машин.

Переходя к упругой модели, естественно, в первую очередь необходимо учесть упругость муфты 2 как самого податливого звена. Тогда динамической

модели можно придать вид последовательной цепочки элементов (рис. 2.1,б) – инерционных  $J_1$ , упругодиссипативных  $c, \psi$  и кинематических  $\Pi$ . Способ определения приведенных значений моментов инерции  $J$  (или масс  $m$ ), коэффициентов жесткости  $c$  и коэффициентов рассеяния  $\psi$ , характеризующих уровень диссипации, будет пояснен в п.п.2.2 – 2.4. В качестве кинематического аналога зубчатой передачи здесь выступает элемент  $\Pi$ , соответствующий в данном случае функции положения, реализующей линейное преобразование входной координаты. Данная модель имеет две степени свободы, поскольку положение всех ее элементов однозначно определяется двумя обобщенными координатами. Цепочка инерционных и кинематических элементов, не прерываемая упругодиссипативными элементами, может быть заменена одним приведенным моментом инерции  $J_{пр}$  (рис. 2.1,в).

С увеличением рабочих скоростей машин растут и частоты возбуждаемых в них колебательных процессов, что приводит к необходимости усложнения динамических моделей. В этих случаях обычно приходится увеличивать число учитываемых упругих элементов машины; при этом растет число степеней свободы исследуемой колебательной системы. Так, например, если в рассматриваемом приводе учесть крутильную податливость участка вала 5 между колесом 4 и барабаном 6, то динамическая модель приобретает дополнительную степень свободы (рис. 2.1,г). При этом общее число степеней свободы  $H = 3$ .

Таким образом, для изучения одного и того же объекта (машины, привода, механизма) могут использоваться совершенно разные динамические модели. Эта неоднозначность моделей машин с упругими звеньями, разумеется, усложняет динамический анализ, поскольку требует от исследователя четких представлений об изучаемых колебательных процессах. Нередко кажется, что чем больше динамическая модель имеет степеней свободы, тем меньшую погрешность можно ожидать при решении задачи. Однако это утверждение справедливо до тех пор, пока оно подкрепляется соответствующим уровнем достоверности исходных данных. Между тем с усложнением модели возникают дополнительные трудности, связанные с выявлением ее параметров (в первую очередь коэффициентов жесткости и диссипативных факторов). Неизбежные ошибки, возникающие при их определении, недостаточная информация и грубые предпосылки могут свести на нет уточнения, которые можно было бы ожидать за счет усложнения модели. Поэтому всегда следует стремиться к выбору наиболее простых динамических моделей, способных отразить исследуемые явления.

При проведении предварительных расчетов на стадии эскизного проектирования машины обычно используется модель машины с жесткими звеньями (кинетостатическая модель). С ее помощью выбирается двигатель, оцениваются в первом приближении инерционные нагрузки и реакции в кинематических па-

рах. При учете динамической характеристики двигателя с помощью кинестатической модели может быть также оценена неравномерность вращения вала двигателя. Нередко при малом коэффициенте неравномерности можно принимать входную координату привода как  $\varphi_0 = \omega t$ , где  $\omega$  – угловая скорость.

Далее на стадии технического проектирования в модель включаются упругодиссипативные элементы. В одних случаях конструктивные особенности исследуемого привода таковы, что позволяют сразу составить одну или несколько динамических моделей. Примеры такого подхода были проиллюстрированы выше. Однако в более сложных случаях для окончательного выбора удачной модели требуются некоторые предварительные расчеты (например, расчет коэффициентов жесткости отдельных элементов), а иногда даже поисковый эксперимент. Нередко удается выделить такие подсистемы (механизмы, узлы и т.п.), которые в первом приближении при некоторых упрощающих предположениях можно рассматривать обособленно, что позволяет более глубоко отобразить локальные динамические процессы.

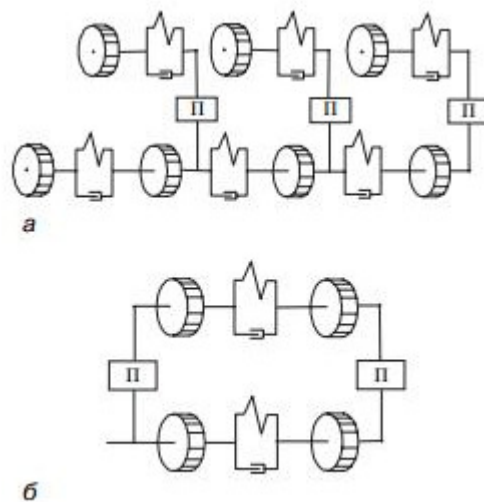


Рис.2.2

В зависимости от вида соединений элементов модели различают цепные модели (см. рис. 2.1,г), разветвленные (рис. 2.2,а) и замкнутые или кольцевые модели (рис. 2.2,б).

В заключение подчеркнем, что выбор динамической модели зависит от поставленной динамической задачи и обычно носит многоступенчатый характер. Большую роль в этой процедуре играют опыт и искусство исследователя.

## 2.2. Приведение инерционных характеристик

При определении приведенных масс и моментов инерции стремятся сохранить неизменной кинетическую энергию системы. Если приведение не сопряжено с изменением числа степеней свободы, то условие баланса кинетической энергии может быть выполнено точно. Так, для приведения момента инерции  $J_3$  к входному звену (см. рис. 2.1,б,в) достаточно сохранить баланс кинетической энергии элементов  $J_2$  и  $J_3$  до и после приведения

$$0,5J_2\dot{\varphi}_2^2 + 0,5J_3\dot{\varphi}_3^2 = 0,5J_{\text{пр}}\dot{\varphi}_2^2,$$

где  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$  – угловые скорости элементов  $J_2$  и  $J_3$ .

Поскольку  $\dot{\varphi}_3 / \dot{\varphi}_2 = u_{21} = z_2 / z_3$ , где  $z_2, z_3$  – числа зубьев, то  $J_{\text{пр}} = J_2 + J_3 u_{21}^2$ .

В общем случае вместо квадрата передаточного отношения коэффициентом приведения является квадрат первой геометрической передаточной функции  $\Pi' = d\Pi/d\varphi$ , где  $\varphi$  – входная координата.

Далее обратимся к примеру, когда приведение может быть осуществлено лишь приближенно, для чего рассмотрим вал, совершающий крутильные колебания (рис. 2.3,а). Сначала примем, что диск  $J_0$  неподвижен. Приведем распределенный по длине вала момент инерции  $J_1$  к сечению правого диска; тем самым осуществляется переход к упрощенной динамической модели, в которой диск с пока неизвестным приведенным моментом инерции  $J_B$  связан с заделкой безынерционным упругим элементом (рис. 2.3,б).

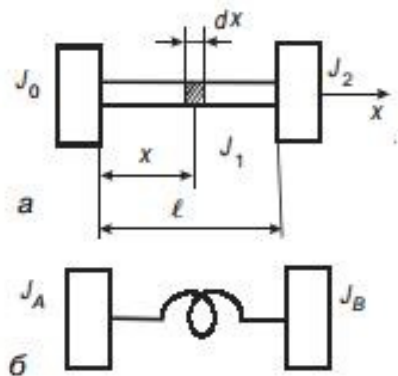


Рис.2.3

Выделим элементарный участок вала  $dx$ , кинетическая энергия которого равна

$$dT_1 = \frac{J_1}{2l} \dot{\varphi}^2(x,t) dx, \quad (2.1)$$

где  $\dot{\varphi}(x,t)$  – угловая скорость в сечении  $x$ .

Интегрируя (2.1), получаем

$$T_1 = \frac{J_1}{2l} \int_0^l \dot{\varphi}^2(x,t) dx.$$

Следовательно, суммарная кинетическая энергия равна

$$T = 0,5 \left[ \frac{J_1}{l} \int_0^l \dot{\varphi}^2(x,t) dx + J_2 \dot{\varphi}^2(l,t) \right]. \quad (2.2)$$

С другой стороны, обращаясь к модели, приведенной на рис. 2.3,б, имеем

$$T = 0,5 J_B \dot{\varphi}^2(l,t). \quad (2.3)$$

Отсюда, приравнявая (2.2) и (2.3),

$$J_B = \frac{J_1}{l} \int_0^l \left[ \frac{\dot{\varphi}(x,t)}{\dot{\varphi}(l,t)} \right]^2 dx + J_2. \quad (2.4)$$

До сих пор выкладки были строгими. Однако для получения конечного результата приходится использовать некоторые рассуждения, носящие приближенный характер. Примем для отношения  $f = \dot{\varphi}(x,t) / \dot{\varphi}(l,t)$  какой-либо правдоподобный закон распределения по  $x$ , который не вступал бы в противоречие с истинными граничными условиями при  $x=0$  и  $x=l$ , например  $f = x/l$ . Тогда на основании (2.4)  $J_B = J_1/3 + J_2$ . (Заметим, что в приведенном относительно простом примере возможно получить точное решение задачи, рассматривая вал как систему с распределенными параметрами.)

В рассмотренном примере кинетическая энергия связана лишь с колебательным процессом. Если диск  $J_0$  программно движению совершает угловые перемещения по заданному закону  $\varphi(0,t) = \varphi_*(t)$ , то

$$T = 0,5 \left[ J_0 \dot{\varphi}_*^2 + \frac{J_1}{l} \int_0^l \dot{\varphi}^2(x,t) dx + J_2 \dot{\varphi}^2(l,t) \right]. \quad (2.5)$$

С другой стороны, для модели с сосредоточенными параметрами

$$T = 0,5[J_A \dot{\varphi}_*^2(t) + J_B \dot{\varphi}^2(l,t)]. \quad (2.6)$$

Здесь  $J_A$ ,  $J_B$  – приведенные значения моментов инерции на левом и правом концах вала.

Абсолютная угловая скорость в произвольном сечении вала  $\dot{\varphi}(x,t)$  складывается из двух составляющих: «программной»  $\dot{\varphi}_*(t)$  и колебательной  $\Delta\dot{\varphi}(x,t)$ . Потребуем, чтобы равенство кинетической энергии исходной системы и модели сохранялось в обоих предельных случаях – при  $\Delta\dot{\varphi} = 0$  (жесткая система) и при  $\dot{\varphi}_* = 0$  (диск  $J_0$  неподвижен). Тогда, приравнявая (2.5) и (2.6) для этих случаев и сохраняя закон распределения скоростей, принятый в предыдущем примере, имеем

$$J_A = J_B = J_0 + J_1 + J_2; \quad J_B = J_1/3 + J_2.$$

Отсюда  $J_A = J_0 + 2J_1/3$ .

Приведение рационально производить к сечениям, в которых располагаются тела с относительно большими моментами инерции. При продольных колебаниях все сказанное остается справедливым и для процедуры приведения масс.

### 2.3. Характеристики упругих элементов и их приведение

Важной характеристикой любого упругого элемента при продольных деформациях  $x$  является коэффициент жесткости  $c = |dF/dx|$ , где  $F$  – восстанавливающая сила, а при крутильных деформациях –  $c = |dM/d\varphi|$ , где  $M$  – восстанавливающий момент,  $\varphi$  – угловая деформация. В первом случае коэффициент жесткости имеет размерность Н/м, а во втором – Н·м. Обратную величину  $e = c^{-1}$  называют коэффициентом податливости.

На рис. 2.4,а представлены типичные графики восстанавливающей силы  $F(x)$ , которым соответствуют графики  $c(x)$ , показанные на рис. 2.4,б. Очевидно, что для линейной характеристики  $c = F/x = \text{const}$ . Функция  $c(x)$  определяется материалом и конструктивными особенностями упругого элемента. Так например, в рабочем диапазоне напряжений металлы обычно подчиняются закону Гука (кривая 1), в то время как для резины более свойственна «жесткая» характеристика (кривая 2), а для многих полимеров – «мягкая» (кривая 3). Однако в конструкциях, состоящих только из металлических деталей, также возможно возникновение нелинейных восстанавливающих сил. В частности, это наблюдается при точечном или линейном контактах двух поверхностей, что характерно для элементов высших кинематических пар. В подобных случаях контактная жесткость увеличивается с ростом нагрузок.

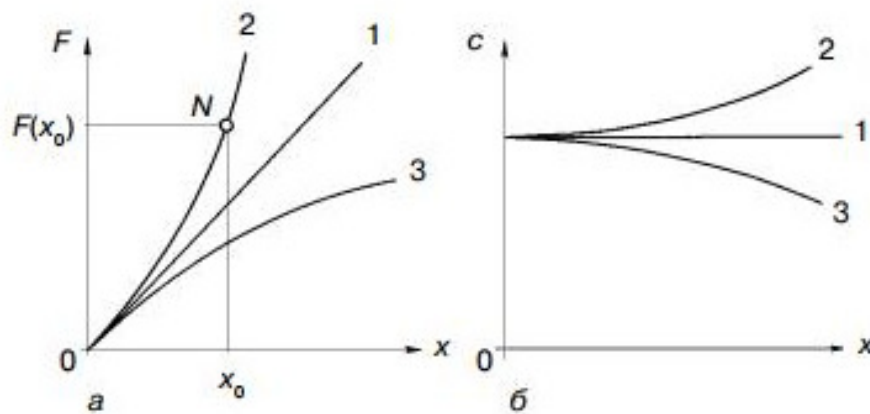


Рис.2.4

Помимо перечисленных причин нарушение линейной характеристики восстанавливающей силы может произойти из-за использования специально выбранных нелинейных упругих элементов (конических пружин, нелинейных муфт), подключения или отключения каких-либо элементов кинематической цепи, наличия зазоров в кинематических парах, установки упоров, фиксаторов и других факторов.

Нередко, однако, нелинейные факторы в общем балансе жесткостей оказываются малозначительными. Кроме того, при исследовании малых колебаний, происходящих в окрестности некоторого равновесного состояния системы  $x_0$ , нелинейные упругие характеристики могут быть линеаризованы. Действительно, пусть  $x = x_0 + \Delta x$ , где  $\Delta x$  отвечает малым колебаниям около положения  $x_0$  (см. рис. 2.4,а). Тогда, разлагая функцию  $F(x_0 + \Delta x)$  в ряд Тейлора, имеем

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \frac{dF}{dx}(x_0)\Delta x + 0,5\frac{d^2F}{dx^2}(x_0)\Delta x^2 + \dots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда, получаем,  $c = \frac{dF}{dx}(x_0)$ . Это

означает, что нелинейную характеристику в окрестности точки  $N$  мы приближенно заменяем касательной в этой точке. Разумеется, чтобы такая замена была правомерной, необходимо, чтобы функция  $F(x)$  в окрестности точки  $N$  была бы непрерывной и дифференцируемой. При нарушении этого условия упругие характеристики называют **существенно нелинейными**.

Заметим, что необходимость учета нелинейностей обычно связана с рассмотрением таких динамических процессов, при которых происходят значительные деформации упругих элементов, либо в тех случаях, когда целью ис-

следования являются специфические эффекты, свойственные только нелинейным системам (см. гл. 8).

Приведение упругих характеристик, как правило, имеет своей целью упрощение модели, что позволяет воспользоваться известным решением задачи. Поставим, например, задачу приведения параллельно соединенных упругих элементов (рис. 2.5,а) к одному упругому элементу  $c_{\text{пр}}$  (рис. 2.5,б). Отличительным свойством параллельного соединения является равенство абсолютных значений деформаций:  $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n| = |x|$ .

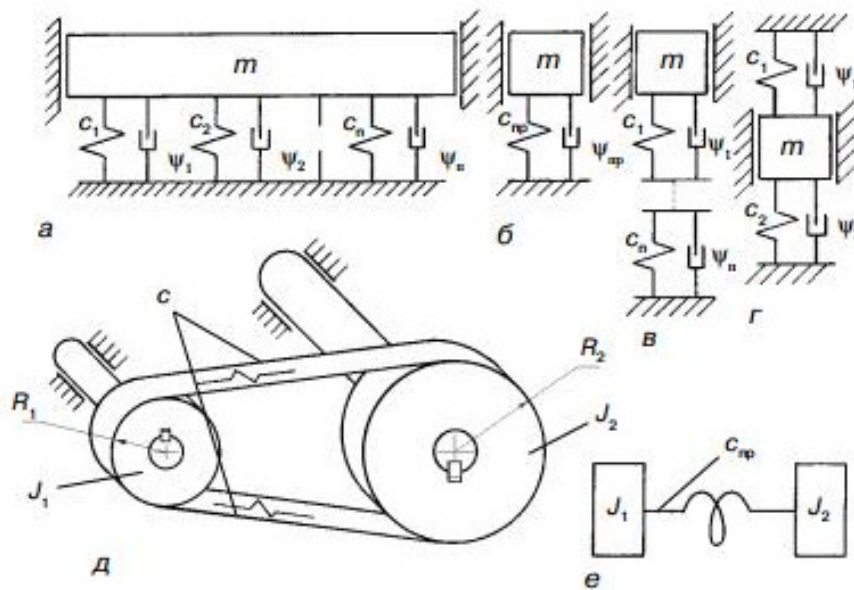


Рис.2.5

При приведении не должен нарушаться баланс потенциальной энергии системы. Для одного элемента  $i$  при деформации  $x_i$  восстанавливающая сила равна  $F_i = -c_i x_i$ , что отвечает потенциальной энергии

$$V_i = -\int_0^{x_i} F_i dx_i = \int_0^{x_i} c_i x_i dx_i = 0,5 c_i x_i^2.$$

Отсюда  $0,5 \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 = 0,5 c_{\text{пр}} x^2$ , а следовательно,

$$c_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n c_i. \quad (2.7)$$

При последовательном соединении (рис. 2.5,в) имеем равенство абсолютных значений сил  $|F_i| = |F|$ . Аналогичным образом получаем

$$e_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n e_i, \quad (2.8)$$

где  $e_{\text{пр}} = c_{\text{пр}}^{-1}$ ;  $e_i = c_i^{-1}$ .

Заметим, что внешние признаки при установлении вида соединения иногда обманчивы. Так, например, соединение, показанное на рис. 2.5,г, можно ошибочно принять за последовательное; между тем при любом перемещении массы  $m$  абсолютная деформация обоих упругих элементов одинакова, а следовательно, соединение является параллельным; при этом  $c_{\text{пр}} = c_1 + c_2$ .

При параллельном соединении определяющую роль играют наиболее жесткие элементы, а при последовательном – наиболее податливые.

Иногда при приведении может измениться размерность коэффициента жесткости. Произведем, например, приведение упругих характеристик ременной передачи (рис. 2.5,д) при переходе к расчетной схеме эквивалентного упругого вала, вращающегося с угловой скоростью ведомого шкива (рис. 2.5,е). Если коэффициент жесткости одной ветви ременной передачи равен  $c$ , то, считая обе ветви натянутыми, можем определить потенциальную энергию как

$$V = 0,5(cx^2 + cx^2) = cx^2,$$

где  $x$  – деформация одной ветви ремня.

Далее введем в рассмотрение добавочный угол поворота второго вала  $\Delta\varphi$ , соответствующий деформации  $x$ . Очевидно, что  $\Delta\varphi = x/R_2$ , где  $R_2$  – радиус ведомого шкива, а поскольку  $V = cx^2 = 0,5c_{\text{пр}}\Delta\varphi^2$ , окончательно имеем  $c_{\text{пр}} = 2cR_2^2$ . Так как здесь имеет место переход от линейных деформаций к угловым, соответствующим образом изменилась размерность коэффициента жесткости с Н/м на Н·м.

## 2.4. Параметры диссипации и их приведение

Графики восстанавливающих сил, приведенные на рис. 2.4,а, носят идеализированный характер, так как при их построении деформируемые элементы принимались идеально упругими, т.е. лишенными диссипативных свойств. Если же учесть силы неупругого сопротивления, направление которых противоположно скорости деформации, то соответствующий график будет иметь две ветви, причем верхняя 1 будет соответствовать нагружению, а нижняя 2 – разгрузке (рис.2.6). Площадь фигуры, ограниченной ветвью 1 и осью абсцисс,

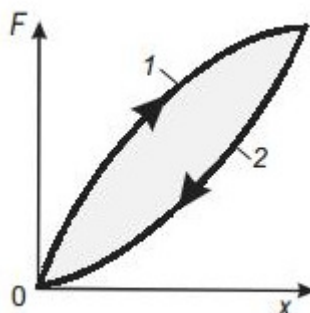


Рис.2.6

соответствует работе, затраченной при деформации, а площадь фигуры, ограниченной сверху ветвью 1, – работе, совершаемой упругим элементом при разгрузке. При этом выделенная площадь, контур которой называют **петлей гистерезиса**, пропорциональна работе, затраченной за один цикл на преодоление неупругого сопротивления. Отношение этой рассеянной энергии к работе, затраченной при деформации, называется коэффициентом рассеяния и обозначается  $\psi$ . Величина и характер зависимости этого параметра от различных факторов в первую очередь определяется самой природой диссипативных сил, которые могут вызываться различными причинами.

В механизмах силы сопротивления чаще всего представляют собой силы трения, возникающие в кинематических парах и неподвижных соединениях деталей. В последнем случае речь идет о так называемом **конструктивном демпфировании**, возникающем при колебаниях на площадках контакта деталей, например в стыке, в резьбе и т. п. Иногда природа сил сопротивления связана с видом демпфирующего устройства, специально предназначенного для увеличения диссипативных свойств системы. Такие устройства могут быть фрикционными, гидравлическими, пневматическими.

Помимо перечисленных разновидностей сил сопротивления следует также отметить силы внутреннего трения в материале, которые возникают при деформации упругих элементов. В динамике механизмов эти силы играют сравнительно малую роль для металлических деталей, однако для деталей, изготовленных из пластмасс, резины и других неметаллических материалов, силы внутреннего трения могут оказаться соизмеримыми с другими силами сопротивления.

Большое число диссипативных факторов, сложность и многообразие процессов, сопровождающих колебательные явления, приводят к тому, что при решении инженерных задач приходится прибегать к параметрам, полученным из эксперимента. В одних случаях экспериментом выявляются коэффициенты рассеяния отдельных элементов конструкции или сочленений, в других – некоторые приведенные значения, свойственные целому механизму, узлу и т.д. Па-

параметры диссипации обычно определяются при моногармонических (т.е. одночастотных) колебаниях в режиме затухающих свободных колебаний либо в резонансном режиме при вынужденных колебаниях. В первом случае мы имеем затухающий процесс (см. рис. 1.2,г), для которого коэффициент рассеяния может быть определен как

$$\psi = 1 - (A_2 / A_1)^2, \quad (2.9)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – два последовательных значения амплитуды, разделенных одним периодом (см. подробнее п. 4.2).

*Логарифмическим декрементом* называют  $\lambda = \ln(A_1 / A_2)$ , при этом  $\psi = 1 - \exp(-2\lambda)$ . При малых значениях  $\lambda$  имеем  $\psi = 2\lambda$ .

В самом общем случае параметры  $\psi$  и  $\lambda$  не являются константами, а могут зависеть от амплитуды и частоты колебаний. Однако анализ многих экспериментальных материалов свидетельствует о том, что в задачах динамики механизмов зависимость параметров диссипации от частоты практически не проявляется или проявляется весьма слабо. Строго говоря, параметры  $\psi$  и  $\lambda$  не зависят от амплитуды только в том случае, если рассеянная энергия пропорциональна квадрату амплитуды, что имеет место, например, при линейной силе сопротивления или силе сопротивления, пропорциональной первой степени амплитуды. В более сложных случаях можно усреднять коэффициенты  $\psi$  или  $\lambda$  в пределах одного или нескольких периодов колебаний. При этом из эксперимента может быть получена функция  $\psi(A)$  или  $\lambda(A)$ .

При динамическом расчете коэффициенты диссипации позволяют установить некоторый энергетический эквивалент, учитывающий силы сопротивления в системе дифференциальных уравнений. Здесь мы лишь укажем, что наиболее эффективный подход к учету диссипативных сил в инженерных задачах связан с так называемой эквивалентной линеаризацией, при которой нелинейная сила сопротивления заменяется условно линейной при сохранении той же величины рассеянной за один цикл энергии. При таком подходе линеаризованная сила сопротивления может быть представлена как  $R = -b\dot{x}$ , где  $b$  – коэффициент пропорциональности (подробнее см. гл.9).

Определим приведенные значения коэффициента рассеяния  $\psi_{\text{пр}}$  при параллельном соединении упругодиссипативных элементов (см. рис.2.5,а). Для перехода к схеме, показанной на рис. 2.5,б, достаточно записать условие баланса рассеянной энергии

$$\psi_{\text{пр}} \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \psi_i V_i, \quad (2.10)$$

где  $\psi_i, V_i$  – коэффициенты рассеяния и максимальная потенциальная энергия рассматриваемого элемента  $i$ .

Принимая во внимание, что  $V_i = 0,5c_i x_i^2$ ;  $V = c_{\text{пр}} x^2$ , а также, что при параллельном соединении  $|x_1| = \dots = |x_n| = |x|$ , на основании (2.10) получаем

$$\psi_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \psi_i c_i / c_{\text{пр}}.$$

Аналогичным образом может быть получена зависимость для  $\psi_{\text{пр}}$  при последовательном соединении упругодиссипативных элементов:

$$\psi_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \psi_i c_{\text{пр}} / c_i.$$

При параллельном соединении величина  $\psi_{\text{пр}}$  обычно близка к значениям  $\psi_i$ , соответствующим наиболее жестким элементам, а при последовательном соединении – наиболее податливым.

Анализ данных, полученных для многих механизмов текстильных, полиграфических машин, станков, машин легкой и ряда других отраслей промышленности, свидетельствует о том, что приведенный коэффициент рассеяния обычно укладывается в диапазон значений  $0,3 < \psi_{\text{пр}} < 0,7$ . Эти результаты в качестве ориентировочных могут быть использованы и в тех случаях, когда при предварительных расчетах отсутствует возможность получения конкретной информации.

В заключение укажем, что отображение диссипативных свойств механических систем затрагивает целый ряд еще неразрешенных проблем, привлекающих внимание многих исследователей.

**Пример.** Составим простейшую модель кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.7,а), в которой учтем осевую податливость шатуна. Произведем приближенную замену массы шатуна  $m_2$  двумя массами  $m_{A2}$  и  $m_{B2}$  в точках **A** и **B** с последующим включением этих масс в инерционные характеристики кривошипа 1 и ползуна 3. Для этого можно воспользоваться известным из курса теории механизмов и машин так называемым статическим замещением масс, при котором суммарная масса звена и положение его центра масс остаются неизменными, однако момент инерции несколько искажается ( $m_{A2} = m_2 B S_2 / AB$ ;  $m_{B2} = m_2 A S_2 / AB$ ;  $S_2$  – центр масс звена 2).

Теперь модель механизма представим в виде кривошипа с безынерционным шатуном 2' и ползуном 3' (кинематический аналог «идеального» механизма) с присоединенным блоком  $c_x, \psi_x, m$  (рис. 2.7,б), учитывающим приве-

денные значения упругих, диссипативных и инерционных параметров системы. На рис.2.7.в показано более лаконичное изображение полученной таким образом динамической модели, в которой элемент П в данном случае отвечает преобразованию угла поворота входного звена  $\varphi$  в перемещение звена 3', т.е.  $x_{B^*} = \Pi(\varphi)$ .

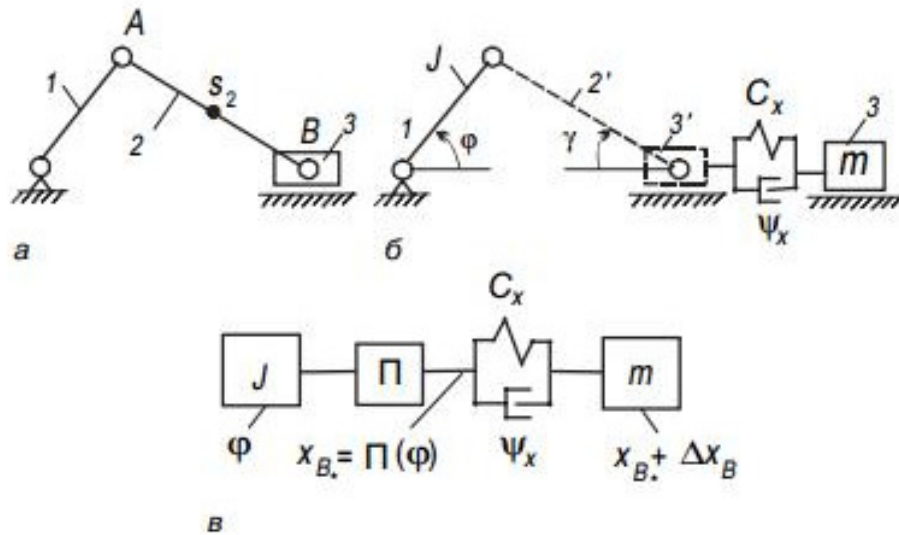


Рис. 2.7

Для определения приведенных значений  $c_x$  и  $\psi_x$  представим текущую координату ползуна как функцию двух переменных  $x_B = x_B(\varphi, L)$ , где  $\varphi$  – угол поворота входного звена;  $L$  – длина шатуна, которая складывается из постоянной составляющей  $L_*$ , отвечающей недеформируемому шатуну и деформации  $\Delta L$ . Далее разложим  $x_B$  в ряд Тейлора по степеням  $\Delta L$ , в котором ограничимся учетом первых двух членов:

$$x_B = x_{B^*} + \left[ \frac{\partial x_B}{\partial L} \right]_* \Delta L.$$

Здесь звездочка соответствует  $\Delta L = 0$ .

Очевидно, что  $x_B$  отвечает идеальной функции положения, т.е. аналогу «идеального» механизма, образованного звеньями 1, 2', 3', (см. рис. 2.7,б), а упругий элемент формирует динамическую ошибку  $\Delta x_B = (\partial x_B / \partial L)_* \Delta L$ , возникающую из-за деформации шатуна  $\Delta L$ .

Снова воспользуемся условием баланса потенциальной энергии  $0,5c\Delta L^2 = 0,5c_x\Delta x_B^2$ . Отсюда следует

$$c_x = c(\Delta L / \Delta x_B)^2 \approx c(\partial L / \partial x_B)_*^2. \quad (2.11)$$

На основании теоремы косинусов имеем  $L^2 = r^2 + x_B^2 - 2rx_B \cos \varphi$ . Дифференцируя это соотношение по  $x_B$ , получаем

$$2L \cdot (\partial L / \partial x_B)_* = 2x_B - 2r \cos \varphi.$$

Тогда

$$(\partial L / \partial x_B)_* = \left[ \frac{x_B - r \cos \varphi}{L} \right]_* = \cos \gamma_*; \quad c_x = c \cos^2 \gamma_*,$$

где  $\gamma_*$ , имеет смысл угла давления.

Поскольку  $\gamma_* = \gamma_*(\varphi)$ , коэффициент жесткости  $c_x$ , строго говоря, оказывается переменным, однако при малых значениях  $\gamma_*$  имеем  $c_x = c$ .

Условие баланса рассеянной энергии до и после приведения имеет вид  $0,5\psi c \Delta L^2 = 0,5\psi_x c_x \Delta x_B^2$ . При учете (2.11) отсюда следует  $\psi_x = \psi$ .

Заметим, что аналогичным образом практически в любом механизме могут быть выделены некоторые «опорные» звенья, которые посредством кинематической пары связаны со стойкой и движутся поступательно или совершают угловые перемещения вокруг неподвижной оси. Именно такие звенья, как правило, обладают наибольшими массами и моментами инерции. При этом характеристики промежуточных звеньев обычно без ощутимой потери в точности могут быть приведены к таким опорным звеньям, как это сделано в нашем примере. При подобном принципе построения моделей удастся добиться того, что положение каждого инерционного элемента характеризуется одной координатой.

## 2.5. Программное движение звеньев механизмов

**Способы получения программных движений.** Движения исполнительных органов, обеспечивающие выполнение заданных технологических или транспортных операций, называются программными. Программные движения оказывают существенное влияние на уровень возбуждаемых колебаний, поэтому задача снижения виброактивности машин тесно сопрягается с проблемой формирования оптимальных законов движения. В современных машинах используются два способа формирования законов движения звеньев.

**Первый способ** широко применяется в цикловых технологических и энергетических машинах, осуществляющих свои функции при установившемся ре-

жиме работы, когда скорость двигателя  $\omega$ , после некоторого переходного режима достигает примерно постоянного значения. Для реализации заданных законов движения используются так называемые **цикловые механизмы** (рычажные, кулачковые, мальтийские и др.), с помощью которых осуществляется нелинейное преобразование координаты на «входе»  $\varphi = \omega t$  в соответствующую координату на «выходе».

При использовании **второго способа** формирование заданных программных движений обеспечивается с помощью **программного управления** входными параметрами двигателей. В подобных случаях механическая система машины обычно имеет более простую структуру, поскольку механизмы осуществляют линейное преобразование координат, как это имеет место, например, в зубчатых передачах с постоянным передаточным отношением. Нередко задача программного управления решается человеком-оператором, например, при управлении транспортными машинами (автомобилями, подъемными кранами, некоторыми видами промышленных роботов и др.) В то же время в современных машинах широкое распространение получили автоматические системы программного управления, в которых закон изменения параметров формируется специальными устройствами [7\*].

В данном пособии мы ограничимся анализом влияния на колебания законов движения, реализуемых первым способом, т.е. непосредственно в механической системе машины.

**Геометрические характеристики механизма и некоторые динамические критерии кинетостатической модели.** Будем понимать под **идеальным механизмом** его кинетостатическую модель при абсолютно точном воспроизведении заданных характеристик, т.е. такой абстрактный механизм, в котором звенья не деформируются, отсутствуют зазоры и погрешности изготовления. Если такой механизм имеет одну степень подвижности, то положение любого звена механизма однозначно определяется в зависимости от угла поворота входного звена  $\varphi_1$ . Для определенности примем, что звено  $n$  совершает вращательное или поступательное движение, описываемое одной координатой  $\varphi_n$ . Тогда

$$\varphi_n = \Pi_n(\varphi_1), \quad (2.12)$$

где  $\Pi_n$  – функция положения звена  $n$ .

Рассмотрим следующие функции, полученные дифференцированием (2.12)

$$\Pi'_n = \frac{d\Pi_n}{d\varphi_1}; \quad \Pi''_n = \frac{d^2\Pi_n}{d\varphi_1^2}; \quad \Pi'''_n = \frac{d^3\Pi_n}{d\varphi_1^3},$$

которые называются соответственно *первой, второй и третьей передаточными функциями* либо аналогами скоростей, ускорений и ускорений второго порядка. Если  $\varphi_1$  отвечает угловой координате, то размерность передаточных функций совпадает с размерностью  $\Pi_n$ .

Плоскопараллельное движение звена может быть описано тремя функциями положения, фиксирующими угловую координату звена и положение одной из его точек.

Связь геометрических характеристик  $\Pi'_n$ ,  $\Pi''_n$ ,  $\Pi'''_n$  с кинематическими  $\dot{\varphi}_n = d\varphi_n/dt$ ;  $\ddot{\varphi}_n = d^2\varphi_n/dt^2$ ;  $\dddot{\varphi}_n = d^3\varphi_n/dt^3$  определяется следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= \Pi'_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1; \\ \ddot{\varphi}_n &= \Pi''_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + \Pi'_n(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1; \\ \dddot{\varphi}_n &= \Pi'''_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^3 + 3\Pi''_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1\ddot{\varphi}_1 + \Pi'_n(\varphi_1)\dddot{\varphi}_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Структура выражений (2.13) свидетельствует о том, что при использовании передаточных функций имеет место четкое разделение геометрических и кинематических характеристик, описывающих движение рассматриваемого звена механизма. В частном случае, в зубчатых механизмах с постоянным передаточным отношением функция положения линейна. Как следует из зависимостей (2.13), в этом случае  $\dot{\varphi}_n = \Pi'_n\dot{\varphi}_1$ ;  $\ddot{\varphi}_n = \Pi'_n\ddot{\varphi}_1$ ;  $\dddot{\varphi}_n = \Pi'_n\dddot{\varphi}_1$ , причем коэффициентом пропорциональности здесь служит первая передаточная функция. Если к тому же входное звено движется с постоянной скоростью  $\dot{\varphi}_1 = \text{const}$ , то и выходное звено будет перемещаться равномерно. Следовательно, возникновение инерционных нагрузок в подобных механизмах возможно только за счет нарушения условий  $\dot{\varphi}_1 = \text{const}$  или  $\Pi'_n = \text{const}$  из-за ошибок при изготовлении и других погрешностей.

При нелинейной функции положения, свойственной так называемым цикловым механизмам – кулачковым, рычажным, шаговым и т.п., динамические условия работы оказываются более напряженными по сравнению с механизмами с линейной функцией положения. Даже в идеальном цикловом механизме в силу  $\ddot{\varphi}_n \neq 0$  возникают инерционные нагрузки, причем нередко весьма значительные. Кроме того, имеет место более невыгодная силовая связь между ведущим и ведомым звеньями.

Если, например, на ведомом звене  $n$  приложена сила  $F$ , которая на ведущем звене уравновешивается моментом  $M$ , то в силу равенства работ на возможных перемещениях

$$M = \Pi'_n(\varphi_1)F. \quad (2.14)$$

Очевидно, что при  $\Pi'_n \neq \text{const}$  даже постоянная сила  $F$  приводит к возникновению на входном звене переменного момента, способного возбуждать вынужденные колебания привода.

Представляет интерес еще один частный случай. Пусть сила  $F$  является силой инерции ведомого звена  $n$ . Тогда, принимая для определенности, что ведомое звено совершает поступательное движение, при  $\dot{\phi}_1 = \text{const}$  имеем

$$|F| = m\dot{\phi}_1^2 |\Pi''_n|. \quad (2.15)$$

После подстановки в (2.14) получаем

$$|M| = m\dot{\phi}_1^2 |\Pi'_n \Pi''_n|. \quad (2.16)$$

Легко убедиться, что

$$\Pi'_n \Pi''_n = \frac{1}{m\dot{\phi}_1^3} \frac{dT_n}{dt},$$

где  $T_n$  – кинетическая энергия звена  $n$ ;  $dT_n/dt$  – кинетическая мощность.

Выражения (2.14) – (2.16) свидетельствуют о том, что геометрические характеристики существенно влияют на динамику механизма. Поэтому экстремальные значения функций  $|\Pi'|_{\max}$ ,  $|\Pi''|_{\max}$ ,  $|\Pi'\Pi''|_{\max}$  могут быть использованы в качестве простейших динамических критериев, с помощью которых производится сопоставление различных законов движения, а также синтез новых законов, обладающих в определенном смысле оптимальными свойствами.

Для контроля за пульсацией инерционных нагрузок на ведомом и ведущем звеньях могут быть использованы критерии  $K_1$  и  $K_2$ :

$$K_1 = \Pi''_{\max} + \xi_1 |\Pi''_{\min}|;$$

$$K_2 = (\Pi'\Pi'')_{\max} + \xi_2 |(\Pi'\Pi'')_{\min}|.$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – некоторые весовые коэффициенты, с помощью которых можно отразить степень важности положительной и отрицательной составляющих.

Вопросы, связанные с определением геометрических характеристик механизмов, освещены во многих монографиях и учебных пособиях, например [7],[8]. Здесь лишь подчеркнем, что по способу формирования геометрических характеристик механизмы можно разделить на две группы: механизмы дискретного синтеза и функционального синтеза.

К первой группе относят механизмы типа рычажных, у которых при синтезе определению подлежит лишь конечное число параметров. Геометрические характеристики таких механизмов, по сути дела, заложены в их схеме, и поэто-

му рациональным выбором параметров можно лишь приблизиться к заданной функции положения.

Ко второй группе относятся механизмы типа кулачковых, в которых профилированием рабочих поверхностей можно непосредственно реализовать заданную функцию положения. Это во многих случаях существенно расширяет возможности учета динамических факторов при синтезе подобных механизмов.

## ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### 3.1. Некоторые сведения из аналитической механики применительно к задачам колебаний механизмов и машин

**Предварительные замечания.** Составление систем дифференциальных уравнений – так называемой математической модели – является одним из важнейших этапов любого динамического расчета. Следует иметь в виду, что если уравнения составлены неверно, то все могущество современной вычислительной техники оказывается бессильным. Один из методов составления систем дифференциальных уравнений основан на использовании общих теорем динамики, базирующихся непосредственно на законах Ньютона (1643 – 1727). При использовании этих теорем применительно к несвободным механическим системам, каковыми являются механизмы и машины, приходится расчленять системы, вводя при этом дополнительные неизвестные величины – реакции связей. При этом соответственно возрастает число уравнений.

Аналитическая механика, базирующаяся на основополагающих работах Г.Лейбница (1646 – 1716), Л.Эйлера (1707 – 1783), Ж.Лагранжа (1736 – 1813), дает общие методы, с помощью которых можно составлять дифференциальные уравнения движения, не вводя реакции идеальных связей. Методы аналитической механики оказались весьма плодотворными при решении прикладных задач динамики машин. Наряду с этими методами мы воспользуемся для некоторых систем так называемым обратным способом, основанном на принципе Даламбера (1717 – 1783).

**Связи, реализуемые в механизмах.** Любой механизм можно рассматривать как механическую систему, подчиненную так называемым связям, т.е. ограничениям геометрического или кинематического характера. Если уравнение связи может быть представлено в общем виде как функция, не содержащая производных от координат, то эта связь называется *голономной*. В частности, примером уравнения голономной связи может служить функция положения  $\varphi_n = \Pi_n(\varphi_0)$ , связывающая конечной зависимостью координаты входного и выходного звеньев. К виду голономной связи могут быть приведены и некоторые зависимости, имеющие форму кинематической связи. Пусть, например, задано передаточное отношение зубчатой передачи, соединяющей два вала  $u_{21} = \omega_2 / \omega_1$ . Тогда это уравнение связи может быть проинтегрировано в общем виде

$$\varphi_2 - \varphi_{2*} = \int_{\varphi_{1*}}^{\varphi_1} u_{21} d\varphi_1 = u_{21}(\varphi_1 - \varphi_{1*}). \quad (3.1)$$

Здесь звездочкой обозначены начальные значения координат  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Однако  $u_{21}$  в некоторых механизмах (например, в вариаторах скорости) может оказаться явной функцией времени. Поскольку уравнение (3.1) теперь не может быть проинтегрировано в общем виде, его следует записать как  $u_{21}(t) = \dot{\varphi}_2 / \dot{\varphi}_1$ . В подобных случаях, когда в уравнении связи не могут быть исключены производные от координат, связь называют *неголономной*.

Связь называется *нестационарной*, если в уравнении связи в явном виде входит время, а в противном случае, – *стационарной*. Функцию положения, судя по этому определению, следует отнести к стационарным связям. Однако если с достаточным основанием можно считать, что  $\varphi_1$  содержит составляющую, которая заданным образом зависит от времени, то такая связь оказывается нестационарной, например,  $\varphi_2 = \Pi_2(\omega t + \Delta\varphi)$ , где  $\omega t$  характеризует текущий идеальный угол входного звена, а  $\Delta\varphi$  – колебания входного звена.

В этом и в целом ряде других случаев нестационарная связь в задачах динамики механизмов возникает как результат идеализации, вызванной стремлением сократить число степеней свободы колебательной системы. По некоторым соображениям методического характера в подобных случаях на стадии составления системы дифференциальных уравнений удобнее оперировать уравнениями стационарной связи, что легко осуществить, если на этом этапе не раскрывать функциональную связь соответствующей координаты с временем.

Связи называются *идеальными*, если сумма работ реакций этих связей на любых возможных перемещениях равна нулю. Поскольку в реальных механизмах всегда имеет место тангенциальная составляющая реакции связи, равная силе трения, то любая связь практически оказывается неидеальной. Тем не менее, в практике можно пользоваться представлением об идеальных связях, если вводить силы трения в соответствующие уравнения как активные силы. При этом должны быть учтены дополнительные соотношения, которые определяются законами трения, выявленными экспериментальным путем. При таком подходе использование понятия об идеальных связях становится достаточно универсальным. Вместе с тем существует широкий класс так называемых самотормозящихся механизмов, для которых сама возможность движения при заданных внешних силах существенным образом зависит от направления передачи сил [1\*],[11\*].

По характеру связей различают *голономные* и *неголономные* системы, а также *склерономные* системы (со стационарными связями) и *реономные* (с нестационарными связями).

**Обобщенные и избыточные координаты.** Как уже отмечалось, одной из наиболее важных характеристик любой модели является *число степеней свободы*, которое для голономных систем определяется числом независимых координат, полностью описывающих положение каждой точки системы. Эти координаты называются *обобщенными* и обозначаются  $q_1, \dots, q_n$ ,

где  $H$  – число степеней свободы. Таким образом, число обобщенных координат одновременно является минимальным числом координат, которыми можно охватить все возможные положения голономной системы.

Первую и вторую производные обобщенной координаты называют соответственно *обобщенной скоростью* и *обобщенным ускорением*.

Наряду с обобщенными координатами при исследовании динамики механизмов нередко целесообразно пользоваться некоторыми вспомогательными координатами, связанными с обобщенными координатами уравнениями связи. Координаты такого вида называют *избыточными* или *лишними*. Очевидно, что число лишних координат  $n$  должно совпадать с числом дополнительных уравнений связи.

**Кинетическая энергия.** На основании сделанных выше оговорок относительно учета нестационарных связей кинетическая энергия может быть представлена в виде следующей знакоположительной квадратичной формы обобщенных скоростей с инерционными коэффициентами  $A_{ik}$ , являющимися в общем случае функциями обобщенных координат [9\*]:

$$T = 0,5 \sum_{i=1}^H \sum_{k=1}^H A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (3.2)$$

где  $A_{ik} = A_{ki} = \sum_{s=1}^N m_s (\partial \vec{r}_s / \partial q_i) (\partial \vec{r}_s / \partial q_k)$ ;  $m_s$  – масса,  $\vec{r}_s$  – радиус-вектор (практическое определение см. ниже).

Нередко может оказаться, что  $A_{ik} = a_{ik} = \text{const}$ . Приближенно к такому же результату мы приходим, если считать, что все обобщенные координаты являются малыми. Тогда  $a_{ik}$  соответствует первому члену разложения функции  $A_{ik}$  в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат.

В развернутом виде квадратичная форма несколько напоминает квадрат многочлена. Так, например, при  $H = 3$ ,  $A_{ik} \approx a_{ik}$

$$T = 0,5(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + a_{33}\dot{q}_3^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2a_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3). \quad (3.3)$$

Практический прием определения инерционных коэффициентов будет разъяснен ниже при рассмотрении примера.

**Обобщенные силы.** Сумма элементарных работ на возможных перемещениях  $\delta q$  может быть представлена в виде

$$\delta W = \sum_{j=1}^H Q_j \delta q_j. \quad (3.4)$$

Размерные коэффициенты  $Q_j$  описывают обобщенные силы, причем в зависимости от того, соответствует ли  $q_j$  линейной или угловой координате,  $Q_j$  имеет размерность силы или момента.

Обобщенная сила  $Q_j$  складывается из потенциальной  $Q_j^V$  и непотенциальной (неконсервативной)  $Q_j^*$  составляющих. При этом  $Q_j^V = -\partial V / \partial q_j$ , где  $V$  - потенциальная энергия. Непотенциальные обобщенные силы, в частности, могут зависеть от времени, обобщенных скоростей и координат.

**Потенциальная энергия.** В механизмах потенциальная энергия, участвующая в формировании колебательных процессов, возникает в основном от упругих деформаций элементов системы. При малых колебаниях в окрестности устойчивого положения равновесия потенциальная энергия может быть представлена в виде знакоположительной квадратичной формы обобщенных координат [9\*]

$$V = 0,5 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_{ik} q_i q_k \quad (c_{ik} = c_{ki}), \quad (3.5)$$

где  $c_{ik} = (\partial^2 V / \partial q_i \partial q_k)^0$  - квазиупругие коэффициенты (практическое определение см. ниже);  $()^0$  - отвечает  $q_1, \dots, q_N = 0$ . Структура выражения (3.5) в раскрытом виде совпадает с (3.3), если заменить  $a_{ik}$  на  $c_{ik}$  и  $\dot{q}_i, \dot{q}_k$  на  $q_i, q_k$ .

**Устойчивость положения равновесия. Теорема Лагранжа-Дирихле.** Выше при представлении потенциальной энергии в виде квадратичной формы мы использовали термин «устойчивость». Дадим некоторые пояснения в связи с этим понятием. Различают три состояния системы, проиллюстрированные на рис.3.1. При **устойчивом** положении (рис.3.1,а) отклонение от положения равновесия приводит к появлению восстанавливающей силы, направленной к этому положению; при **неустойчивом** (рис.3.1.б) - возникает дестабилизирующая сила, стремящаяся увести систему от этого положения; при **безразличном**

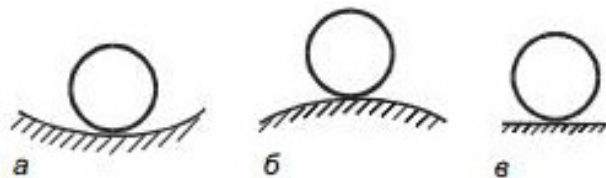


Рис. 3.1

состоянии (рис.3.1.в) отклонение не приводит к возникновению каких-либо сил. Очевидно, что колебания возникают только около устойчивого равновесия, поэтому именно это состояние является характерным для вопросов, изучаемых в данном курсе.

На первый взгляд кажется, что для суждения об устойчивости положения равновесия достаточно просто посмотреть на схему, как мы это сделали в приведенных примерах. Однако в общем случае ответ на этот вопрос не столь очевиден. Обратимся к модели обращенного маятника, безмассовый стержень которого зажат между упругими элементами (рис.3.2). В данном случае визуальный анализ не приводит к результату. В подобных случаях следует воспользоваться *теоремой Лагранжа-Дирихле*, которая устанавливает, что *равновесие материальной системы, находящейся под действием консервативных сил, является устойчивым, если в этом положении ее потенциальная энергия имеет минимум* [9\*].

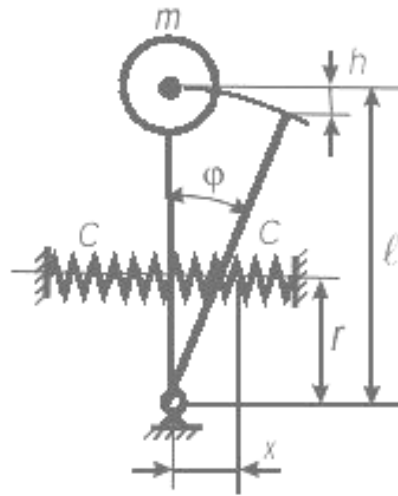


Рис.3.2

Для рассматриваемой модели потенциальная энергия маятника при его отклонении от положения равновесия определяется как

$$V = -mgh + 0,5c_{\text{пр}}x^2,$$

где  $h = l(1 - \cos \varphi)$ ;  $x$  – деформация упругого элемента;  $c_{\text{пр}} = 2c$  – приведенный коэффициент жесткости.

В окрестности положения равновесия  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \varphi / 2 \approx \varphi^2 / 2$ ;  $x \approx r\varphi$ .

Тогда

$$\partial V / \partial \varphi = (2cr^2 - mgl)\varphi.$$

При  $\varphi = 0$  имеем  $\partial V / \partial \varphi = 0$ . Это свидетельствует о том, что данное положение отвечает равновесию. Однако для устойчивости этого положения со-

гласно теореме Лагранжа-Дирихле следует обеспечить условие  $V(0) = V_{\min}$ ; для этого необходимо, чтобы при  $\varphi = 0$   $\partial^2 V / \partial \varphi^2 > 0$ . Отсюда следует

$$\zeta = 2cr^2 / (mgl) > 1.$$

Коэффициент  $\zeta$  можно трактовать как *запас устойчивости*. Следует ли всегда стремиться к увеличению запаса устойчивости? Однозначного ответа на этот вопрос не существует, однако одно ясно: чем технически совершеннее система, тем ближе значение  $\zeta$  к его критическому значению  $\zeta = 1$ . Дело в том, что с ростом  $\zeta$  утрачивается мобильность системы, проявляющаяся в способности быстро реагировать на внешние возмущения. В этом легко убедиться, сопоставив, например, процесс ходьбы человека с перемещением жука.

### Уравнения Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^* \quad (j = \overline{1, H}). \quad (3.6)$$

При дальнейшем изложении звездочка при неконсервативной обобщенной силе  $Q_j^*$  будет опущена.

При  $A_{ik} = a_{ik} = \text{const}$  после подстановки (3.2), (3.5) в (3.6) получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^H a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^H c_{jk} q_k = Q_j \quad (j = \overline{1, H}). \quad (3.7)$$

В инерционных и квазиупругих коэффициентах, входящих в систему уравнений (3.7), первый индекс  $j$  отвечает номеру уравнения, а второй  $k$  – номеру обобщенного ускорения или обобщенной координаты.

**Особая форма уравнений Лагранжа второго рода с избыточными координатами.** При составлении систем дифференциальных уравнений для моделей, включающих цикловые механизмы, коэффициенты  $A_{ik}$  в выражении для кинетической энергии чаще всего не могут быть приняты постоянными, так как одна или несколько обобщенных координат не являются малыми величинами (см. выше). Такой координатой, например, является координата заданного программного движения входного звена системы  $\varphi_0(t)$ . В случае  $A_{ik} \neq \text{const}$  при подстановке (3.2) в (3.6) приходится осуществлять дифференцирование сложных выражений и производить громоздкие преобразования. Существенного упрощения можно достичь введением избыточных координат, устраняющих необходимость предварительного выражения всех координат

системы через независимые обобщенные координаты. Пусть кроме  $H$  обобщенных координат  $q_1, \dots, q_H$  используются  $n$  избыточных координат  $q_{H+1}, \dots, q_{H+n}$ . Уравнения Лагранжа с избыточными координатами при голономных, стационарных и идеальных связях имеют вид [9\*]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} \Lambda_i \quad (j = \overline{1, H+n}).$$

где  $\Lambda_i$  – множители Лагранжа;  $\Phi_i(q_1, \dots, q_{H+n})$  – уравнения связи, заданные в неявной форме.

Физический смысл членов с множителями Лагранжа связан с появлением дополнительных реакций идеальных связей, которые в отличие от (3.6) в данном случае не полностью исключаются из уравнений Лагранжа второго рода из-за превышения числа координат  $H+n$  над числом степеней свободы  $H$ .

Выберем избыточные координаты таким образом, чтобы по всем координатам  $\partial T / \partial q_j = 0$ ; при этом для всех сочетаний  $i$  и  $k$  имеем  $A_{ik} = a_{ik} = \text{const}$ . Следовательно, при линейных упругих характеристиках выражения для кинетической и потенциальной энергии относительно всех координат, включая избыточные, опять имеют вид квадратичных форм (3.2) и (3.5). При этом соответствующая система дифференциальных уравнений может быть записана аналогично (3.7)

$$\sum_{k=1}^{H+n} a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{H+n} c_{jk} q_k = Q_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} \Lambda_i \quad (j = \overline{1, H+n}). \quad (3.8)$$

Множители Лагранжа могут быть выражены из любых  $H+n$  уравнений системы (3.8), однако наиболее просто они определяются при принятой индексации координат из последних  $n$  уравнений.

### 3.2. Составление системы дифференциальных уравнений на базе уравнений Лагранжа второго рода и квадратичных форм

Практические приемы использования методов аналитической механики (см. п.3.1) проиллюстрируем на примере динамической модели привода машины, приведенной на рис.2.1,г. Примем, что  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  – абсолютные угловые координаты соответствующих «дисков» с моментами инерции  $J_1, J_2, J_3, J_4$ . Кинематический аналог зубчатой передачи П в данном случае соответствует линейному преобразованию координат  $\varphi_3 = \Pi(\varphi_2) = u_{21} \varphi_2$ , где  $u_{21}$  – передаточное отношение между валами 1 и 2.

Рассмотрим основные этапы составления системы уравнений.

**1. Определение числа степеней свободы и выбор обобщенных координат.** В п.2.1 мы уже отмечали, что данная модель имеет три степени свободы ( $H = 3$ ). Число степеней свободы легко определить по числу закрепленных инерционных элементов, превращающих систему в неподвижную. В качестве первой обобщенной координаты примем угол поворота  $\varphi_1 = q_1$ , а в качестве остальных угловые деформации валов  $q_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $q_3 = \varphi_4 - \varphi_3$ . При этом  $\varphi_2 = q_1 + q_2$ ;  $\varphi_3 = (q_1 + q_2)u_{21}$ ;  $\varphi_4 = (q_1 + q_2)u_{21} + q_3$ . Таким образом, трем степеням свободы соответствуют три независимые обобщенные координаты.

Разумеется, приведенный выбор обобщенных координат не является единственным. Так, например, при том же числе степеней свободы принципиально можно было бы выбрать в качестве обобщенных координат углы поворота в абсолютном движении  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ . (Углы  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  одновременно нельзя принимать в качестве обобщенных координат, так как они однозначно связаны между собой передаточным отношением  $u_{21}$ ). Однако, имея в виду опыт использования ЭВМ и удобство дальнейшего анализа результатов расчета, следует наряду с абсолютными координатами входных звеньев отдать предпочтение обобщенным координатам, соответствующим малым относительным перемещениям. В противном случае малые динамические ошибки будут в дальнейшем выявлены как разность больших величин, что приводит к существенным погрешностям расчета.

**2. Представление кинетической энергии в виде квадратичной формы обобщенных скоростей.** Запишем выражение для кинетической энергии механизма

$$T = 0,5(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + J_3\dot{\varphi}_3^2 + J_4\dot{\varphi}_4^2) = 0,5\{J_1\dot{q}_1^2 + J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + J_3u_{21}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + J_4[u_{21}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \dot{q}_3]^2\}. \quad (3.9)$$

Кинетическая энергия в общем виде может быть представлена как знакоположительная квадратичная форма (3.2). Поскольку  $u_{21} = \text{const}$ , в рассмотренном примере  $A_{ki} = a_{ki} = \text{const}$ . Поскольку  $u_{21} = \text{const}$ , в рассмотренном примере  $A_{ki} = a_{ki} = \text{const}$ .

В нашем случае при  $H = 3$

$$T = 0,5(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + a_{33}\dot{q}_3^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2a_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3). \quad (3.10)$$

Сопоставляя (3.9) и (3.10), имеем

$$a_{11} = J_1 + J_2 + (J_3 + J_4)u_{21}^2; \quad a_{22} = J_2 + (J_3 + J_4)u_{21}^2; \quad a_{33} = J_4;$$

$$a_{12} = a_{21} = J_2 + (J_3 + J_4)u_{21}^2; \quad a_{13} = a_{31} = J_4u_{21}; \quad a_{23} = a_{32} = J_4u_{21}.$$

**3. Представление потенциальной энергии в виде квадратичной формы обобщенных координат.** Угловым деформациям валов  $q_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  и  $q_3 = \varphi_4 - \varphi_3$  отвечает потенциальная энергия

$$V = 0,5(c_1q_2^2 + c_2q_3^2). \quad (3.11)$$

Согласно (3.5), при  $H = 3$

$$V = 0,5(c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + c_{33}q_3^2 + 2c_{12}q_1q_2 + 2c_{13}q_1q_3 + 2c_{23}q_2q_3). \quad (3.12)$$

Сопоставляя (3.11) и (3.12), имеем  $c_{22} = c_1$ ;  $c_{33} = c_2$ . Остальные коэффициенты обращаются в нуль.

**4. Определение неконсервативных обобщенных сил.** Помимо движущего момента  $M_1$  и момента технологического сопротивления  $M_4$  учтем моменты диссипативных сил  $R_1$ ,  $R_2$ , возникающие при деформации валов, при этом  $\text{sign}R_1 = -\text{sign}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = -\text{sign}\dot{q}_2$ ;  $\text{sign}R_2 = -\text{sign}(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) = -\text{sign}\dot{q}_3$ . Составим уравнение работ на возможных перемещениях

$$\begin{aligned} \delta W &= M_1\delta\varphi_1 + R_1\delta(\varphi_2 - \varphi_1) + R_2\delta(\varphi_4 - \varphi_3) - M_4\delta\varphi_4 = \\ &= (M_1 - M_4u_{21})\delta q_1 + (R_1 - M_4u_{21})\delta q_2 + (R_2 - M_4)\delta q_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Сопоставляя (3.4) с (3.13), имеем

$$Q_1 = M_1 - M_4u_{21}; \quad Q_2 = R_1 - M_4u_{21}; \quad Q_3 = R_2 - M_4.$$

**5. Подстановка коэффициентов и обобщенных сил в систему дифференциальных уравнений (3.7):**

$$\left. \begin{aligned} [J_1 + J_2 + (J_3 + J_4)u_{21}^2]\ddot{q}_1 + [J_2 + (J_3 + J_4)u_{21}^2]\ddot{q}_2 + J_4u_{21}\ddot{q}_3 &= M_1 - M_4u_{21}; \\ [J_2 + (J_3 + J_4)u_{21}^2]\ddot{q}_1 + [J_2 + (J_3 + J_4)u_{21}^2]\ddot{q}_2 + J_4u_{21}\ddot{q}_3 + c_1q_2 &= R_1 - M_4u_{21}; \\ J_4u_{21}\ddot{q}_1 + J_4u_{21}\ddot{q}_2 + J_4\ddot{q}_3 + c_2q_3 &= R_2 - M_4. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

В первое уравнение системы (3.14) вошел движущий момент  $M_1$ , который связан с угловой скоростью  $\dot{\varphi}_1 = \dot{q}_1$  определенной зависимостью, называемой характеристикой двигателя. Так, например, для асинхронного электродвигателя упрощенная форма динамической характеристики двигателя для установившихся режимов имеет вид (см. п.5.10, 10.6.)

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1^0 [1 - \nu_d (M_1 + T_d \dot{M}_1)], \quad (3.15)$$

где  $\dot{q}_1^0$  – угловая скорость идеального холостого хода;  $\nu_d$  – крутизна статической характеристики;  $T_d$  – электромагнитная постоянная времени, зависящая от параметров его электрической цепи. Параметры  $\nu_d, T_d$  могут быть определены на основании данных, приведенных в каталоге электродвигателя.

Строго говоря, уравнения вида (3.15) должны рассматриваться совместно с системой (3.14); при этом могут быть определены  $M_1(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$ . Однако опыт инженерных расчетов свидетельствует о том, что нередко для нахождения  $\varphi_1(t) = q_1(t)$  достаточную точность дает модель жесткого привода, в которой игнорируется податливость звеньев, или модели, учитывающие наиболее податливые элементы передаточного механизма (см. рис.2.1,б). При таком подходе при анализе системы (3.14) координату  $q_1$  можно считать заданной функцией времени, а во многих случаях даже принять  $q_1 \approx \omega_1 t$ . Тогда применительно к нашему примеру, решая систему, состоящую из уравнений  $j = 2, 3$ , находим  $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$ , а первое уравнение ( $j = 1$ ) используем для определения движущего момента  $M_1$ .

Для переходных режимов (разгон, торможение) момент  $M_1$  обычно известен. Так, например, при разгоне нередко можно принять  $M_1 = M_{1\max}$ .

Приведенная методика составления систем дифференциальных уравнений может быть применена и в тех случаях, когда функция положения является нелинейной, если первая геометрическая передаточная функция  $\Pi'$ , будучи переменной, незначительно колеблется около своего среднего значения. В противном случае удобнее пользоваться особой формой уравнения Лагранжа второго рода с избыточными координатами (см. п.3.1).

В соответствии с этим методом примем помимо обобщенных координат  $q_1 = \varphi_1$ ;  $q_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ ;  $q_3 = \varphi_4 - \varphi_3$  одну избыточную координату  $q_4 = \varphi_3$ . При этом мы располагаем одним дополнительным уравнением связи ( $n = 1$ )

$$q_4 = \Pi(q_1 + q_2),$$

которое может быть переписано в форме

$$\Phi_1 = \Pi(q_1 + q_2) - q_4 = 0.$$

Составим систему дифференциальных уравнений для рассматриваемой модели в форме (3.8).

При определении инерционных, квазиупругих коэффициентов и обобщенных сил с избыточными координатами следует обращаться так же, как с обобщенными. В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} T &= 0,5(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + J_3\dot{\varphi}_3^2 + J_4\dot{\varphi}_4^2) = \\ &= 0,5[J_1\dot{q}_1^2 + J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + J_3\dot{q}_4^2 + J_4(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2]; \\ V &= 0,5[c_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + c_2(\varphi_4 - \varphi_3)^2] = 0,5(c_1q_2^2 + c_2q_3^2). \end{aligned}$$

Отсюда  $a_{11} = J_1 + J_2$ ;  $a_{22} = J_2$ ;  $a_{33} = J_4$ ;  $a_{44} = J_3 + J_4$ ;  $a_{12} = J_2$ ;  $a_{34} = J_4$ ;  $c_{22} = c_1$ ;  $c_{33} = c_2$ . Остальные коэффициенты равны нулю. Далее находим

$$\partial\Phi_1/\partial q_1 = \Pi'; \quad \partial\Phi_1/\partial q_2 = \Pi'; \quad \partial\Phi_1/\partial q_3 = 0; \quad \partial\Phi_1/\partial q_4 = -1.$$

После подстановки в систему (3.8) окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} (J_1 + J_2)\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 + Q_2 + \Pi'\Lambda_1; \\ J_2\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 + c_1q_2 = Q_2 + \Pi'\Lambda_1; \\ J_4\ddot{q}_3 + J_4\ddot{q}_4 + c_2q_3 = Q_3; \\ J_4\ddot{q}_3 + (J_3 + J_4)\ddot{q}_4 = Q_4 - \Lambda_1. \end{aligned} \right\}$$

Из последнего уравнения этой системы можно непосредственно выразить множитель Лагранжа  $\Lambda_1$  и подставить его в предыдущие уравнения. Кроме того

$$\ddot{q}_4 = [\Pi''(q_1 + q_2)](\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + [\Pi'(q_1 + q_2)](\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2).$$

Однако следует заметить, что во многих случаях при анализе системы целесообразно сохранить множители Лагранжа и производные избыточных координат. Помимо чисто вычислительной стороны вопроса это нередко облегчает оценку степени связанности отдельных колебательных контуров.

Определение обобщенных сил при использовании избыточных координат ничем не отличается от общего метода и не нуждается в дополнительных пояснениях.

### 3.3. Составление систем дифференциальных уравнений с помощью обратного способа

При составлении систем дифференциальных уравнений изгибных колебаний для балок и валов с сосредоточенными массами более предпочтительным оказывается так называемый обратный способ, основанный на принципе Даламбера. Проиллюстрируем его применение на примере балки с двумя массами

(рис.3.3,а).Ограничиваясь рассмотрением изгибных колебаний в вертикальной плоскости , перейдем сначала к безмассовому упругому «скелету» балки (рис.3.3,б). Для этого следует к связи (в данном случае к безмассовой упругой балке) кроме внешних сил  $F_1$  и  $F_2$  приложить согласно принципу Даламбера силы инерции  $-m_1\ddot{y}_1$ ,  $-m_2\ddot{y}_2$ , где  $y_1(t), y_2(t)$  – колебания соответствующих масс. Таким образом, мы формально свели задачу к типовой балке, подверженной воздействию сил  $P_1 = F_1 - m_1\ddot{y}_1$  и  $P_2 = F_2 - m_2\ddot{y}_2$ , т.е. к задаче, рассматриваемой в курсе сопротивления материалов. При этом

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e_{11}P_1 + e_{12}P_2; \\ y_2 &= e_{21}P_1 + e_{22}P_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

где  $e_{jk}$  - коэффициент податливости, который численно равен перемещению в сечении  $j$  под действием единичной силы, приложенной в сечении  $k$  ( $e_{jk} = e_{kj}$ ).

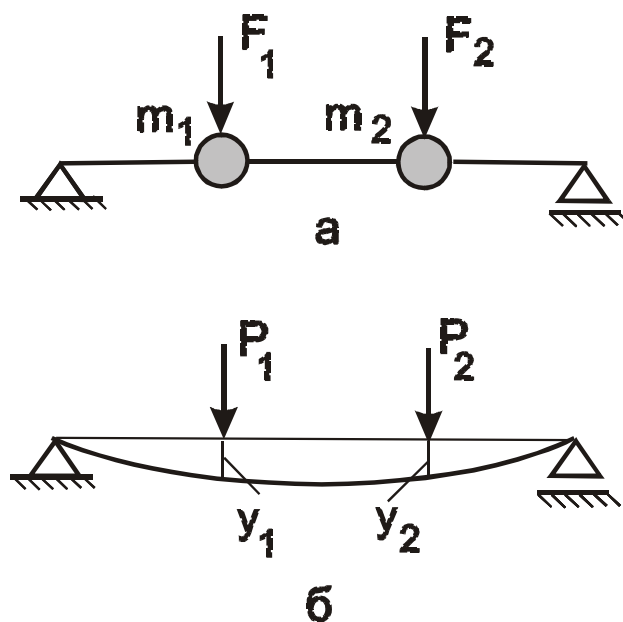
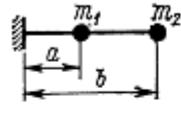
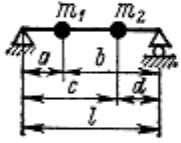
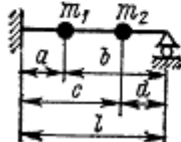
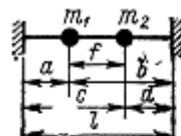
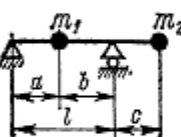
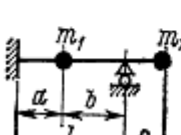


Рис.3.3

Отметим, что матрица коэффициентов податливости равна обратной матрице квазиупругих коэффициентов, входящих в квадратичную форму (3.5).

В табл.3.1 приведены расчетные формулы для определения коэффициентов податливости (влияния) в зависимости от вида опор вала. При этом приняты следующие условные обозначения:  $E$  – модуль упругости материала вала (для конструкционных сталей  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>);  $I = \pi d^4 / 64$  – осевой момент инерции поперечного сечения вала, м<sup>4</sup>;  $d$  – диаметр вала.

Таблица 3.1

схема балки	$e_{11}$	$e_{22}$	$e_{12}$
	$\frac{a^3}{3EI}$	$\frac{b^3}{3EI}$	$\frac{a^2}{2EI} \left( b - \frac{a}{3} \right)$
	$\frac{a^2 b^2}{3EI l}$	$\frac{c^2 d^2}{3EI l}$	$\frac{ad}{6EI l} \times (l^2 - a^2 - d^2)$
	$\frac{a^3}{3EI} \left[ 1 - \frac{a(2l + b)^2}{4l^3} \right]$	$\frac{c^3}{3EI} \left[ 1 - \frac{c(2l + d)^2}{4l^3} \right]$	$\frac{a^2}{2EI} \left[ c - \frac{a}{3} - \frac{3c^2}{2l^3} \left( l - \frac{a}{3} \right) \times \left( l - \frac{c}{3} \right) \right]$
	$\frac{a^3 b^3}{3EI l^3}$	$\frac{c^3 d^3}{3EI l^3}$	$\frac{ad}{6EI l^3} [ bc(lf + 2ad) - l^2 f^2 ]$
	$\frac{a^2 b^2}{3EI l}$	$\frac{c^2}{3EI} (l + c)$	$-\frac{abc(l + a)}{6EI l}$
	$\frac{a^3}{3EI} \left[ 1 - \frac{a(2l + b)^2}{4l^3} \right]$	$\frac{c^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3l}{4c} \right)$	$-\frac{ca^2}{2EI} \left[ \frac{3}{2} \times \left( 1 - \frac{a}{3l} \right) - 1 \right]$

После подстановки в (3.16)  $P_1$  и  $P_2$  получаем

$$\left. \begin{aligned} e_{11} m_1 \ddot{y}_1 + e_{12} m_2 \ddot{y}_2 + y_1 &= e_{11} F_1 + e_{12} F_2; \\ e_{21} m_1 \ddot{y}_1 + e_{22} m_2 \ddot{y}_2 + y_2 &= e_{21} F_1 + e_{22} F_2; \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

или в общем случае

$$\sum_{k=1}^H e_{jk} m_k \ddot{y}_k + y_j = \sum_{k=1}^H e_{jk} F_k \quad (j=1, \dots, H), \quad (3.18)$$

где  $j$  – номер уравнения.

### 3.4. Электромеханические аналогии

Ветви электрических цепей состоят из индуктивности, емкости и омического сопротивления. Каждому из этих элементов отвечает падение потенциала (напряжения). Так, индуктивному сопротивлению отвечает

$$u_L = L di / dt = L d^2 q_{\ominus} / dt^2, \quad (3.19)$$

где  $L$  – индуктивность;  $i$  – сила тока;  $q_{\ominus} = \int i dt$  – заряд.

Таблица 3.2

#### Эквивалентные физические величины

Механическая система	Электрическая цепь	
	Первая аналогия	Вторая аналогия
Обобщенная координата $q$	Заряд $q_{\ominus}$	Магнитное потокосцепление $\Psi$
Обобщенная скорость $\dot{q}$	Сила тока $i$	Напряжение $u$
Сила $F, Q$	Напряжение $u$	Сила тока $i$
Инерционный коэффициент (обобщенная масса) $a$	Индуктивность $L$	Заряд $q_{\ominus}$
Коэффициент податливости $e$	Емкость $C$	Индуктивность $L$
Коэффициент жесткости $c$	$C^{-1}$	$L^{-1}$
Коэффициент силы линейного сопротивления $b$	Омическое сопротивление $R$	Омическая проводимость $g = R^{-1}$
Кинетическая энергия $T = 0,5a\dot{q}^2$	Магнитная энергия $W_M = 0,5Li^2$	Электрическая энергия $W_{\ominus} = 0,5Cu^2$
Потенциальная энергия $V = 0,5cq^2$	Электрическая энергия $W_{\ominus} = 0,5q^2 / C$	Магнитная энергия $W_M = 0,5\Psi^2 / C$

Соответственно для емкости и омического сопротивления имеем

$$u_C = q_3 / C; \quad u_R = Ri = Rdq_3 / dt, \quad (3.20)$$

где  $C$  – емкость;  $R$  – омическое сопротивление.

В формулах (3.19), (3.20) легко усмотреть аналогию между электрической и механическими системами. Так, силе тока  $i$  в механической системе отвечает обобщенная скорость  $\dot{q}$ , а заряду  $q_3$  – обобщенная координата  $q$ . Тогда  $u_L$  соответствует инерционной составляющей,  $u_C$  – восстанавливающей силе (закону Гука), а  $u_R$  – силе линейного сопротивления.

Соответствующие друг другу в механической и электрической системах понятия, физические величины и обозначения приведены в табл.3.2 (первая аналогия).

Методу кинестатики, основанному на принципе Даламбера, в электрической системе при этой аналогии отвечает второй закон Кирхгофа, на основании которого для электрического контура, показанного на рис.3.4, получаем

$$L\ddot{q}_3 + R\dot{q}_3 + C^{-1}q_3 = E(t), \quad (3.21)$$

где  $E(t) = E_0 \sin \omega t$  – электродвижущая сила генератора переменного тока.

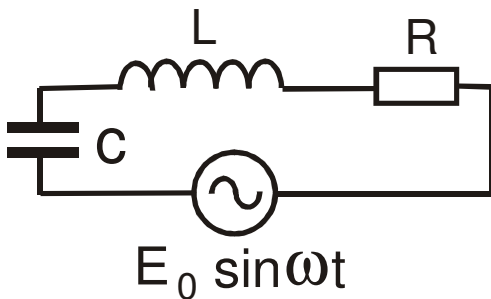


Рис.3.4

ей внешнего источника  $E$ .

Аналогия, рассмотренная выше, не единственная. Согласно второй аналогии (см. табл.3.2) формула (3.19) может быть представлена в виде

$$\Psi = \int u_L dt = Li_L,$$

где  $\Psi$  – магнитное потокосцепление.

На основании (3.20)

$$\int i_C dt = Cu_C; \quad d\Psi / dt = Ri_R.$$

При колебаниях в электрическом контуре имеет место энергетический баланс между полем катушки индуктивности  $L$  (аналог – кинетическая энергия), электрическим полем заряженного конденсатора  $C$  (аналог – потенциальная энергия), энергией при протекании тока на сопротивлении  $R$ , идущей на выделение тепла, и энергии

Отсюда следует

$$i_L = L^{-1}\Psi; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d^2\Psi}{dt^2}; \quad i_R = R^{-1} \frac{d\Psi}{dt}.$$

Таким образом,  $i_L$  при второй аналогии отвечает восстанавливающей силе,  $i_C$  – инерционной составляющей, а  $i_R$  – линейной силе сопротивления.

Легко убедиться, что при этой аналогии принципу Даламбера отвечает первый закон Кирхгофа, согласно которому алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

## ГЛАВА 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 4.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы

При свободных колебаниях внешнее возмущение отсутствует, поэтому на основании (3.7) для системы с одной степенью свободы имеем

$$a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q = 0 \quad (4.1)$$

или

$$\ddot{q}_1 + k^2q_1 = 0, \quad (4.2)$$

где  $k = \sqrt{c_{11}/a_{11}}$  – круговая частота свободных колебаний или собственная частота.

Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (4.2) имеет вид

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (4.3)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные, для определения которых следует задать начальные условия: при  $t = 0$   $q_1 = q_{10}$  и  $\dot{q}_1 = \dot{q}_{10}$ .

Подставляя начальные условия в зависимости  $q_1$  и  $\dot{q}_1$ , получаем  $C_1 = q_{10}$ ;  $C_2 = \dot{q}_{10}/k$ . Таким образом,

$$q_1 = q_{10} \cos kt + \frac{\dot{q}_{10}}{k} \sin kt. \quad (4.4)$$

Приведем еще одну форму решения (4.4), для чего воспользуемся подстановкой  $q_{10} = A \sin \alpha$  и  $\dot{q}_{10}/k = A \cos \alpha$ :

$$q_1 = A \sin(kt + \alpha), \quad (4.5)$$

где  $A$  – амплитуда свободных колебаний;  $kt + \alpha$  – фаза колебаний;  $\alpha$  – начальная фаза.

График  $q_1(t)$  приведен на рис.4.1. Период свободных колебаний равен  $T = 2\pi/k$ . Принимая во внимание, что  $q_{10}^2 + (\dot{q}_{10}/k)^2 = A^2$ ,  $\sin \alpha = q_{10}/A$ ,  $\cos \alpha = \dot{q}_{10}/(kA)$ , амплитуда колебаний и начальная фаза легко определяется на основании известных начальных условий.

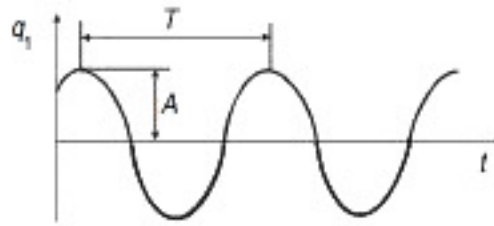


Рис. 4.1

Как будет показано в дальнейшем, собственная частота является важнейшей характеристикой колебательного процесса, предопределяющей виброактивность машины. Согласно (4.2), для расчета собственной частоты необходимо знать инерционный и квазиупругий коэффициенты.

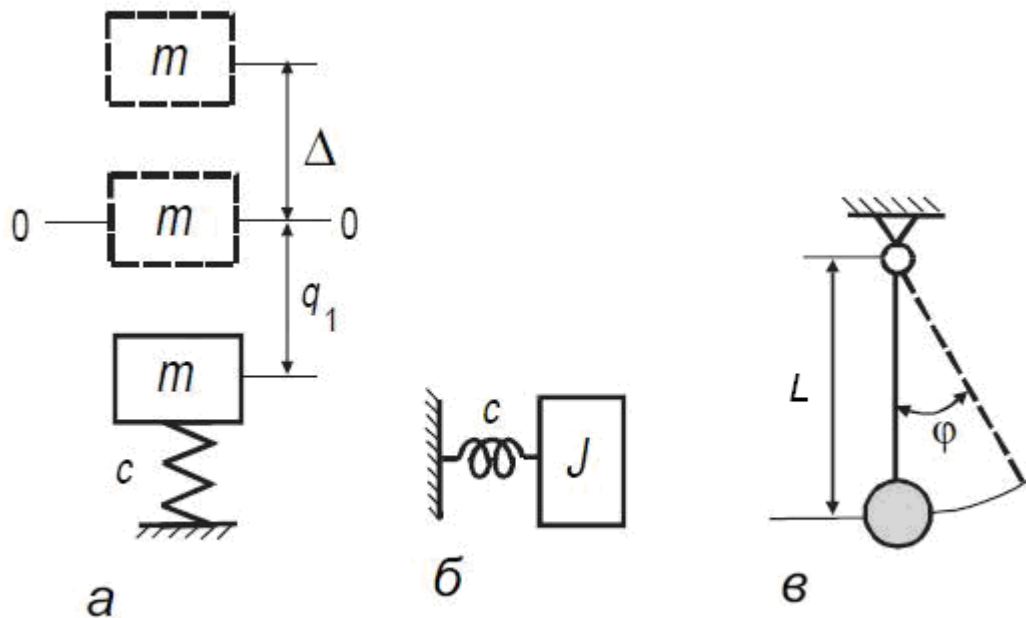


Рис. 4.2

Рассмотрим несколько простейших моделей (рис.4.2). Для тела массой  $m$ , установленного на упругом элементе (рис.4.2,а), имеем следующее выражение для кинетической и потенциальной энергии:  $T = 0,5mq_1^2$  и  $V = 0,5cq_1^2$ . Следовательно, соответствующие коэффициенты в квадратичных формах равны  $a_{11} = m$  и  $c_{11} = c$ . Отсюда

$$k = \sqrt{c/m}. \quad (4.6)$$

В инженерных расчетах иногда удобно представить коэффициент жесткости как  $c = mg/\Delta$ , где  $\Delta$  – осадка, т.е. статическая деформация под действием собственного веса. Тогда

$$k = \sqrt{g / \Delta}. \quad (4.7)$$

Может возникнуть вопрос, почему в выражении для потенциальной энергии был опущен член, отвечающий силе тяготения. Покажем, что, если принять за начало отсчета обобщенной координаты положение статического равновесия  $0-0$ , это справедливо. Действительно, при этом

$$V = V(\Delta + q_1) - V(\Delta) = 0,5c(\Delta + q_1)^2 - mgq_1 - 0,5c\Delta^2.$$

Принимая во внимание, что в положении статического равновесия  $mg = c\Delta$ , получаем  $V = 0,5cq_1^2$ . Однако такое упрощение в процедуре записи потенциальной энергии возможно лишь в том случае, если в положении равновесия *вес уравновешивается восстанавливающей силой упругого элемента*. Если это не так, как, например, для модели, показанной на рис.3.2, силы тяготения должны быть учтены в выражении для потенциальной энергии.

Для модели, отображающей крутильные колебания вала с диском (рис.4.2,б), аналогичным образом получаем  $a_{11} = J_{\text{np}}$ ,  $c_{11} = c$ , а следовательно,

$$k = \sqrt{c / J_{\text{np}}}. \quad (4.8)$$

Для маятника (рис.4.2,в)  $T = 0,5mv^2$ ;  $V = mgh$ . Учитывая, что  $h = L(1 - \cos \varphi)$ ,  $v = L\dot{\varphi}$  и, приняв в качестве обобщенной координаты  $q_1 = \varphi$ , имеем  $T = 0,5ml^2\dot{q}_1^2$ ;  $V = mgL(1 - \cos \varphi) = 2mgL \sin^2 0,5\varphi \approx 0,5mgLq_1^2$ . Отсюда  $a_{11} = mL^2$ ,  $c_{11} = mgL$ , а следовательно,

$$k = \sqrt{g / L}. \quad (4.9)$$

Для электрического колебательного контура согласно уравнению (3.21) имеем  $a_{11} = L$ ,  $c_{11} = C^{-1}$ , где  $L$  – индуктивность,  $C$  – емкость. Следовательно, при отсутствии омического сопротивления ( $R = 0$ ) имеем  $k = 1/\sqrt{LC}$ .

## 4.2. Влияние линейной силы сопротивления на свободные колебания

Пусть на систему действует неконсервативная сила, равная силе сопротивления, пропорциональной первой степени скорости  $Q = -b\dot{q}$ . (Здесь и ниже индекс 1 при обобщенной координате и коэффициентах будет опущен). Тогда

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \quad (4.10)$$

или после деления на инерционный коэффициент  $a$

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \quad (4.11)$$

где  $b/a = 2n$ ;  $c/a = k^2$ .

Решение дифференциального уравнения (4.11) имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) = A_0 e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (4.12)$$

где  $e = 2,71828$  – основание натурального логарифма;  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ ;  $A_0, \alpha$  – начальная амплитуда и начальная фаза, определяемые начальными условиями (см. п. 4.1).

Таким образом, частота свободных колебаний теперь, строго говоря, зависит от характеристики силы сопротивления:

$$k_1 = k\sqrt{1 - \delta^2}, \quad (4.13)$$

где  $\delta = n/k$  – коэффициент демпфирования (доля критического демпфирования), который для приводов и механизмов обычно лежит на интервале  $0,025 < \delta < 0,07$ , редко превышая значение  $0,1$ . При этом оказывается, что в механических колебательных системах при отсутствии специальных демпфирующих устройств  $k_1 \approx k$ . Это означает, что при инженерном расчете собственной частоты и периода свободных колебаний влиянием линейной силы сопротивления можно пренебречь ( $T_1 = 2\pi/k_1 \approx 2\pi/k$ ).

Решению (4.12) отвечает затухающий колебательный процесс (рис.4.3). Интенсивность затухания характеризуется декрементом колебаний и логарифмическим декрементом колебаний. **Декрементом колебаний  $D$**  называют отношение двух смежных амплитуд, разделенных одним периодом. Таким образом, согласно (4.12)

$$D = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_0 e^{-nt_2}}{A_0 e^{-nt_1}} = e^{-n(t_2 - t_1)} = e^{-nT_1} \approx e^{-nT}. \quad (4.14)$$

Поскольку декремент колебаний не зависит от амплитуды, можно утверждать, что **уменьшение амплитуд происходит по бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой равен декременту колебаний  $D$** .

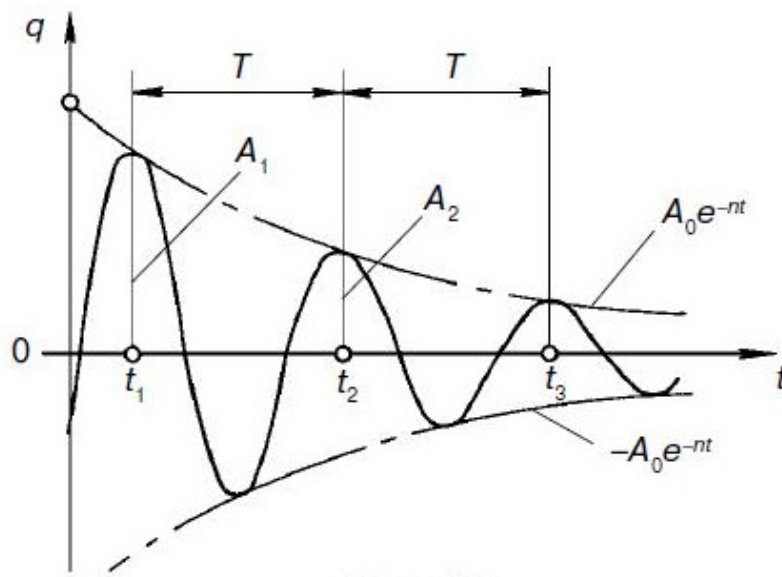


Рис. 4.3

**Логарифмическим декрементом** называют взятый по абсолютной величине натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\lambda = |\ln D| = nT = n \cdot 2\pi / k = 2\pi\delta. \quad (4.15)$$

Введенный п.2.3 коэффициент рассеяния  $\psi$ , характеризующий относительные энергетические потери, затрачиваемые на преодоление сил сопротивления, связан с параметром  $\lambda$  следующим образом:

$$\psi = 1 - (A_2 / A_1)^2 = 1 - e^{-2\lambda}. \quad (4.16)$$

При малых значениях  $\lambda$  ( $\lambda < 0,15$ ) можно принять  $e^{-2\lambda} \approx 1 - 2\lambda$ ; при этом  $\psi \approx 2\lambda$ .

### 4.3. Влияние постоянной силы сопротивления на свободные колебания

В первом приближении можно считать, что постоянная сила сопротивления возникает при сухом трении, подчиняющемся закону Кулона, – так называемом «кулоновом» трении, при котором сила трения определяется как  $F = -f|N|\text{sign}\dot{q}$ . Здесь  $f$  – коэффициент трения;  $N$  – сила нормального давления; символ  $\text{sign}$  означает «знак» ( $\text{sign}\dot{q} = 1$  при  $\dot{q} > 0$  и  $\text{sign}\dot{q} = -1$  при  $\dot{q} < 0$ ).

Строго говоря, при действии кулонова трения система сохраняет линейные свойства только на определенных временных отрезках, в пределах которых скорость  $\dot{q}$  не меняет своего знака. Такие системы, называемые кусочно-линейными, по своим динамическим проявлениям относят к нелинейным системам (подробнее см. гл.8).

Итак, в рассматриваемом случае математической моделью служат дифференциальные уравнения

$$a\ddot{q} + cq = -P \quad (\dot{q} > 0); \quad (4.17)$$

$$a\ddot{q} + cq = P \quad (\dot{q} < 0). \quad (4.18)$$

Решение уравнений (4.17), (4.18) имеют вид

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - P/c \quad (\dot{q} > 0); \quad (4.19)$$

$$q = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + P/c \quad (\dot{q} < 0). \quad (4.20)$$

Задаваясь начальными условиями  $q = q_0$ ,  $\dot{q} = \dot{q}_0$ , найдем на основании (4.19)  $C_1$  и  $C_2$ , после чего определяем  $t_*$  – момент смены знака функции  $\dot{q}$ . Далее, принимая  $q(t_*)$  и  $\dot{q}(t_*)$  в качестве начальных условий для второго участка ( $\dot{q} < 0$ ), находим  $C_3$  и  $C_4$  из решения (4.20) и т.д. Такой прием называют **методом припасовывания** решений. Полная остановка наступает при  $|q|_{\max} < P/c = h$ . Это условие определяет границу так называемой зоны застоя, наблюдаемой во многих стрелочных приборах (рис.4.4).

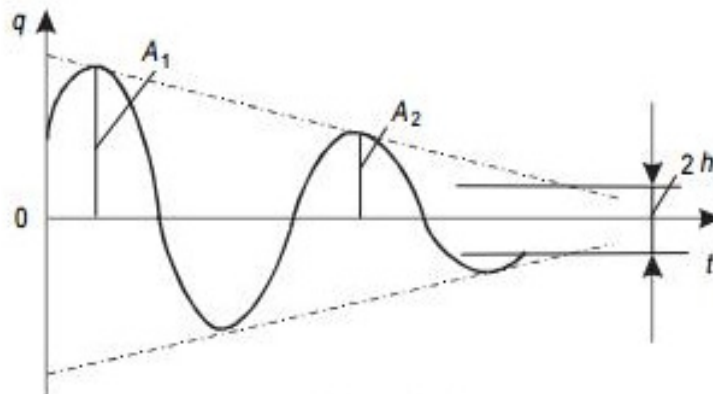


Рис. 4.4

Обратимся к еще одному способу описания рассматриваемого колебательного процесса, обладающему большой наглядностью. За один период колебаний механическая система теряет энергию  $\Delta E_-$ , которая расходуется на работу сил сопротивления, равную  $4PA$ , где  $A$  – средняя амплитуда на рассматриваемом цикле колебаний.

Таким образом,

$$0,5c(A_1^2 - A_2^2) = 4PA.$$

Принимая  $A = 0,5(A_1 + A_2)$ , получим

$$\Delta A = 4P/c, \quad (4.21)$$

где  $\Delta A = A_2 - A_1$ .

Поскольку  $\Delta A$  согласно (4.21) не зависит от амплитуды, можно утверждать, что *амплитуды убывают по арифметической прогрессии*, а следовательно, затухание происходит по линейному закону.

Формула (4.21) может быть использована для реализации эффективного способа определения коэффициента трения  $f$ . При колебаниях ползуна на горизонтальной направляющей сила нормального давления равна  $N = mg$ . Тогда, принимая во внимание, что  $k^2 = c/m$ , получаем

$$f = \pi^2 \Delta A / (gT^2),$$

где  $T = 2\pi/k$  – период свободных колебаний.

#### 4.4. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы

Согласно (3.7) система уравнений при  $H = 2$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Поскольку речь идет о свободных колебаниях, правая часть системы (3.7) принята равной нулю.

Решение ищем в виде

$$q_1 = A \sin(kt + \alpha); \quad q_2 = B \sin(kt + \alpha). \quad (4.23)$$

После подстановки (4.23) в (4.22) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sin(kt + \alpha)[(c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B] &= 0; \\ \sin(kt + \alpha)[(c_{21} - a_{21}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Эта система уравнений справедлива при произвольном  $t$ , поэтому выражения, заключенные в квадратные скобки, равны нулю. Тем самым получаем линейную систему алгебраических уравнений относительно  $A$  и  $B$ .

Очевидное тривиальное решение этой системы  $A = 0$ ,  $B = 0$  согласно (4.23) отвечает отсутствию колебаний. Однако наряду с этим решением существует и нетривиальное решение  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  при условии, что определитель системы  $\Delta(k^2)$  равен нулю:

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

Этот определитель называют **частотным**, а уравнение относительно  $k$  – **частотным уравнением**. В раскрытом виде функция  $\Delta(k^2)$  может быть представлена как

$$\begin{aligned} \Delta(k^2) &= (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{22}c_{11} + a_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{12})k^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

При  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  и  $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$  график  $\Delta(k^2)$  имеет вид параболы, пересекающей ось абсцисс (рис.4.5).

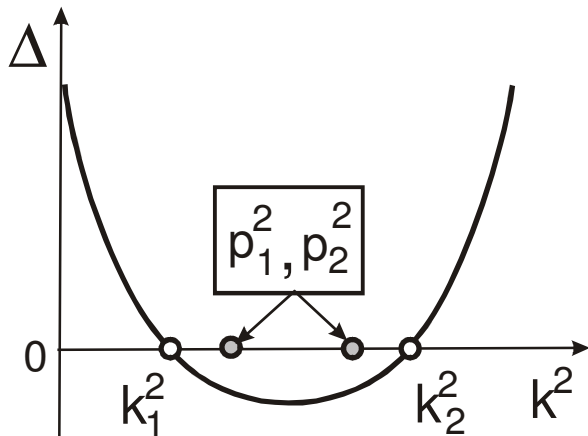


Рис.4.5

Покажем, что для колебаний около устойчивого положения равновесия приведенные выше неравенства соблюдаются. Преобразуем выражение для кинетической энергии следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= 0,5(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2) = \\ &= (2a_{11})^{-1}[(a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2)^2 + \\ &\quad + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\dot{q}_2^2] \geq 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

При  $\dot{q}_2 = 0$  имеем  $T = 0,5a_{11}\dot{q}_1^2 > 0$ ; отсюда следует, что  $a_{11} > 0$ . Если в последнем выражении (4.27) допустить, что  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ , то можно было бы подобрать такую комбинацию отличных от нуля значений  $\dot{q}_1$  и  $\dot{q}_2$ , при которых кинетическая энергия обращалась бы в нуль, что невозможно. Подобные рассуждения можно привести и для потенциальной энергии. Таким образом, остается принять  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  и  $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ .

Можно показать, что аналогичные неравенства равносильны утверждению о положительности определителя, составленного из коэффициентов квадратичных форм при любом числе степеней свободы  $1, \dots, H$ . В такой обобщенной форме их называют условиями Сильвестра [9\*].

Можно показать, что аналогичные неравенства равносильны утверждению о положительности определителя, составленного из коэффициентов квадратичных форм при любом числе степеней свободы  $1, \dots, H$ . В такой обобщенной форме их называют условиями Сильвестра [9\*].

Далее докажем, что корнями частотного уравнения (4.25) служат два положительных значения  $k_1^2$  и  $k_2^2$  (в теории колебаний меньшему индексу отвечает меньшая частота, т.е.  $k_1 < k_2$ ). С этой целью введем сначала понятие **парциальной** частоты. Под этим термином понимают собственную частоту системы с

одной степенью свободы, полученной из исходной системы закреплением всех обобщенных координат, кроме одной. Так, например, если в первом из уравнений системы (4.22) принять  $q_2 \equiv 0$ , то парциальной частотой будет  $p_1 = \sqrt{c_{11}/a_{11}}$ . Аналогичным образом, закрепляя  $q_1 \equiv 0$ , из второго уравнения системы (4.22) получаем  $p_2 = \sqrt{c_{22}/a_{22}}$ .

Чтобы частотное уравнение (4.25) имело два действительных корня  $k_1$  и  $k_2$ , необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, график функции  $\Delta(k^2)$  при  $k=0$  имел бы положительную ординату, а, во-вторых, чтобы он пересекал ось абсцисс. Случай кратных частот  $k_1 = k_2$ , а также обращение низшей частоты в нуль, здесь не рассматривается. Первое из этих условий соблюдается, поскольку  $\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ . В справедливости второго условия легко убедиться, подставив в зависимость (4.25)  $k = p_1$  и  $k = p_2$ ; при этом  $\Delta(p_1^2) < 0$  и  $\Delta(p_2^2) < 0$ . Одновременно мы показали, что **парциальные частоты лежат на частотном диапазоне между собственными частотами**. Информация такого рода при инженерном расчете облегчает прогнозы и оценки.

Полученным двум значениям частот  $k_1$  и  $k_2$  соответствуют частные решения вида (4.23), поэтому общее решение имеет форму

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Таким образом, каждая из обобщенных координат участвует в сложном колебательном процессе, представляющем собой сложение гармонических движений с разными частотами, амплитудами и фазами (рис.4.6). Частоты  $k_1$  и  $k_2$  в общем случае несоизмеримы, поэтому  $q_1, q_2$  не являются периодическими функциями.

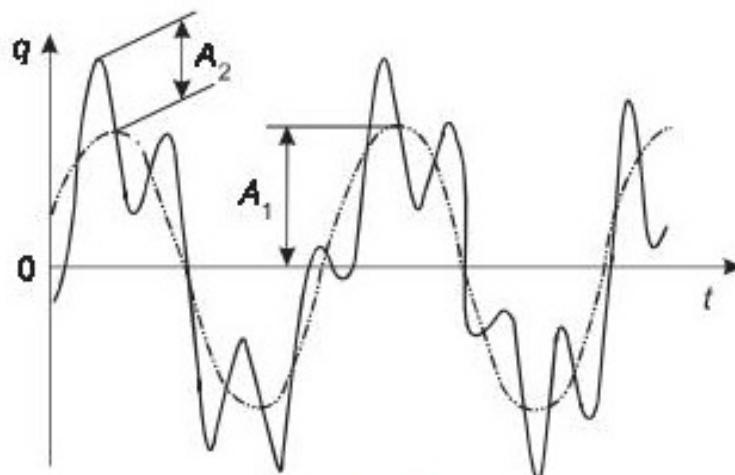


Рис. 4.6

Отношение амплитуд свободных колебаний при фиксированной собственной частоте называют **коэффициентом формы**. Для системы с двумя свободами коэффициенты формы  $\beta_i = B_i / A_i$  определяются непосредственно из уравнений (4.24):

$$\beta_i = -\frac{c_{11} - a_{11}k_i^2}{c_{12} - a_{12}k_i^2} = -\frac{c_{21} - a_{21}k_i^2}{c_{22} - a_{22}k_i^2} \quad (i = 1, 2). \quad (4.29)$$

Таким образом, коэффициенты формы  $\beta_1 = B_1 / A_1$  и  $\beta_2 = B_2 / A_2$  зависят только от параметров системы и не зависят от начальных условий. Коэффициенты формы характеризуют для рассматриваемой собственной частоты  $k_i$  распределение амплитуд по колебательной цепи. Совокупность этих амплитуд образует так называемую **форму колебаний**.

Отрицательное значение коэффициента формы означает, что колебания находятся в противофазах.

При использовании стандартных программ на ЭВМ иногда используют нормированные значения коэффициентов формы. Под этим термином понимают

$$\beta_{11}^* = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}; \quad \beta_{21}^* = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}; \quad \beta_{12}^* = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \quad \beta_{22}^* = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

В коэффициенте  $\beta_{ir}^*$  индекс  $i$  отвечает номеру координаты, а индекс  $r$  — номеру частоты. Очевидно, что  $\beta_{21}^* / \beta_{11}^* = \beta_1$ ,  $\beta_{22}^* / \beta_{12}^* = \beta_2$  или  $\beta_{1r}^* = 1 / \sqrt{1 + \beta_r^2}$ ;  $\beta_{2r}^* = \beta_r / \sqrt{1 + \beta_r^2}$ . Легко заметить, что  $\beta_{ir}^* < 1$ .

В системе уравнений (4.28) оставшиеся четыре неизвестных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  определяются с помощью начальных условий:  $q_1(0) = q_{10}$ ;  $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_{10}$ ;  $q_2(0) = q_{20}$ ;  $\dot{q}_2(0) = \dot{q}_{20}$ .

Наличие линейной силы сопротивления так же, как и в системе с одной степенью свободы, приводит к затуханию свободных колебаний.

**Пример.** Определим собственные частоты, парциальные частоты и коэффициенты формы для колебательной системы, показанной на рис.4.7,а. Принимая в качестве обобщенных координат абсолютные перемещения масс  $x_1 = q_1$ ,  $x_2 = q_2$ , запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = 0,5(m\dot{q}_1^2 + m\dot{q}_2^2); \quad V = 0,5[cq_1^2 + c(q_2 - q_1)^2 + cq_2^2].$$

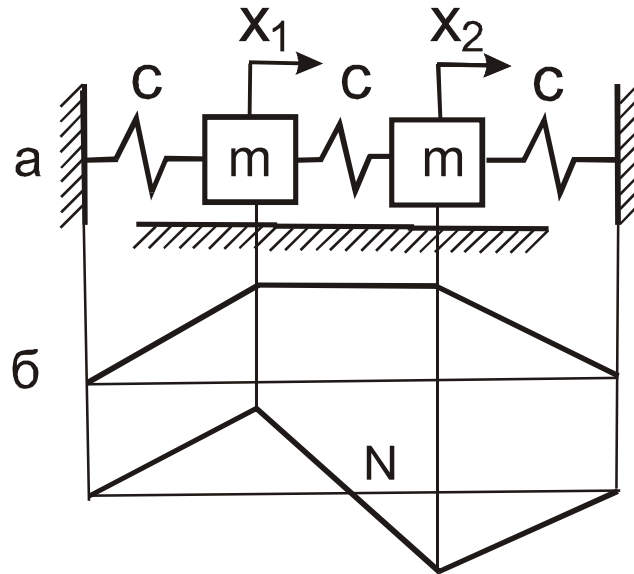


Рис.4.7

Таким образом,  $a_{11} = m$ ;  $a_{22} = m$ ;  $a_{12} = 0$ ;  $c_{11} = 2c$ ;  $c_{22} = 2c$ ;  $c_{12} = -c$ . После подстановки в частотные уравнения (4.25) получаем

$$m^2 k^4 - 4mck^2 + 3c^2 = 0.$$

При этом  $k_1 = \sqrt{c/m}$ ;  $k_2 = \sqrt{3c/m}$ ;

$p_1 = p_2 = \sqrt{2c/m}$ . Согласно (4.29)

$$\beta_1 = -\frac{2c - mk_1^2}{-c} = 1;$$

$$\beta_2 = -\frac{2c - mk_2^2}{-c} = -1.$$

На рис.4.7,б приведены формы колебаний. При первой форме колебаний массы перемещаются синхронно в одном направлении, а при второй – встречно. Кроме того, в последнем случае появилось сечение  $N$ , не участвующее в колебательном процессе с собственной частотой  $k_2$ . Это так называемый **узел колебаний**.

#### 4.5. Определение собственных частот и форм изгибных колебаний системы с двумя степенями свободы

Согласно (3.17) система дифференциальных уравнений, описывающая изгибные колебания, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} e_{11}m_1\ddot{y}_1 + e_{12}m_2\ddot{y}_2 + y_1 &= 0; \\ e_{21}m_1\ddot{y}_1 + e_{22}m_2\ddot{y}_2 + y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Принимая  $y_1 = A \sin(kt + \alpha)$ ,  $y_2 = B \sin(kt + \alpha)$ , после выкладок, аналогичных приведенным в п.4.4, получаем частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - e_{11}m_1k^2 & -e_{12}m_2k^2 \\ -e_{21}m_1k^2 & 1 - e_{22}m_2k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.31)$$

При этом зависимости, определяющие коэффициенты формы, имеют вид

$$\beta_r = \frac{1 - e_{11}m_1k_r^2}{e_{12}m_2k_r^2} = \frac{e_{21}m_1k_r^2}{1 - e_{22}m_2k_r^2} \quad (r = 1, 2). \quad (4.32)$$

#### 4.6. Определение собственных частот и форм колебаний систем с конечным числом степеней свободы

Система уравнений (3.7) при свободных колебаниях имеет вид

$$\mathbf{a}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{c}$  – матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов;  $\mathbf{q}$  – матрица-столбец (вектор) обобщенных координат.

Решение отыскивается в виде  $\mathbf{A} \sin(kt + \alpha)$ , где  $\mathbf{A}$  – вектор амплитуд. После подстановки в (4.33)

$$(\mathbf{c} - k^2\mathbf{a})\mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (4.34)$$

При  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  должно удовлетворяться условие

$$\det(\mathbf{c} - k^2\mathbf{a}) = 0. \quad (4.35)$$

Нередко при расчетах удобно воспользоваться приемом умножения (4.34) слева на  $\mathbf{a}^{-1}$

$$(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{c} - k^2\mathbf{E})\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;  $\mathbf{a}^{-1}$  – обратная матрица.

Из теории матриц следует, что при нетривиальном решении  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  параметры  $k_1^2, \dots, k_H^2$  являются собственными значениями матрицы  $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{c}$ , а коэффициенты формы – собственными векторами этой матрицы.

При использовании обратного способа составления систем дифференциальных уравнений (см. п.3.3) матричная форма этих уравнений имеет вид

$$\mathbf{em}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Аналогичным образом получаем

$$(\mathbf{em} - k^{-2}\mathbf{E})\mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (4.36)$$

В этом случае собственные значения матрицы  $\mathbf{em} - k^{-2}\mathbf{E}$  равны  $k_1^{-2}, \dots, k_H^{-2}$ , а собственный вектор определяет форму колебаний. Для определения собственных частот и форм колебаний этим способом имеются стандартные программы, реализуемые на ЭВМ.

#### 4.7. Оценка низшей собственной частоты с помощью метода Данкерлея (Dunkerley)

Частотное уравнение (4.35) может быть представлено в виде

$$B_H k^{2H} + B_{H-1} k^{2(H-1)} + \dots + B_1 k^2 + B_0 = 0.$$

Разделим все слагаемые на  $k^{2H} \neq 0$ . Тогда

$$B_0 h^H + B_1 h^{(H-1)} + \dots + B_H = 0, \quad (4.37)$$

где  $h = k^{-2}$ .

При действительных корнях уравнения (4.37) согласно одной из формул Виета (1540–1603)

$$\sum_{i=1}^H h_i = -B_1 / B_0, \quad (4.38)$$

где  $h_i$  – корни уравнения (4.37).

Таким образом,

$$k_1^{-2} + k_2^{-2} + \dots + k_H^{-2} = -B_1 / B_0.$$

Обычно каждая из следующих частот существенно превосходит предыдущую, поэтому определяющим оказывается первое слагаемое этой суммы. Отсюда следует

$$k_1 > \sqrt{-B_0 / B_1}. \quad (4.39)$$

Можно показать, что коэффициенты  $B_0$  и  $B_1$  имеют разные знаки, поэтому подкоренное выражение всегда положительно. Особенно удобно применение формулы Данкерлея при оценке низшей частоты изгибных колебаний на основании частотного уравнения (4.36). В этом случае  $B_0 = 1$  и  $B_1 = -\sum_{i=1}^H e_{ii} m_i$ , следовательно,

$$k_1 > 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^H e_{ii} m_i}. \quad (4.40)$$

Следует подчеркнуть, что ценность полученных неравенств состоит не только в том, что они приближенно определяют нижнюю границу возможного диапазона значений собственных частот, но и в то же время служат для приближенной оценки значения низшей частоты.

#### 4.8. Позиционные и циклические координаты

Выше мы предполагали, что число собственных частот равно числу степеней свободы  $H$ . Так ли это? Рассмотрим следующий простой пример – модель, представляющую собой два диска с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$ , соединенные упругим элементом с коэффициентом крутильной жесткости  $c$  (рис.4.8). В данной системе, имеющей две степени свободы ( $H = 2$ ), примем в качестве обобщенных координат угол поворота диска  $J_1$ , равный  $\varphi_1 = q_1$ , и угловую деформацию  $\varphi_2 - \varphi_1 = q_2$ . Тогда выражения для кинетической и потенциальной энергии примут вид  $T = 0,5[J_1 \dot{q}_1^2 + J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2]$ ;  $V = 0,5c q_2^2$ .

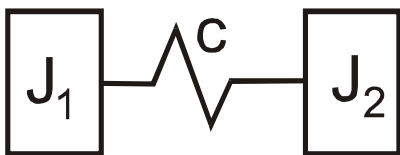


Рис.4.8

**Позиционной координатой** называют обобщенную координату, которая не может быть исключена из выражения потенциальной энергии. Остальные координаты называют **циклическими**. Таким образом, в нашем примере  $q_1$  – циклическая координата, а  $q_2$  – позиционная.

Теперь имеем  $a_{11} = J_1 + J_2$ ;  $a_{12} = a_{22} = J_2$ ;  $c_{11} = c_{12} = 0$ ;  $c_{22} = c$ . После подстановки в (4.25) получаем частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} -(J_1 + J_2)k^2 & -J_2k^2 \\ -J_2k^2 & c - J_2k^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2[k^2 J_1 J_2 - c(J_1 + J_2)] = 0.$$

Отсюда

$$k = k_2 = \sqrt{\frac{c(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} \quad (k_1 = 0). \quad (4.41)$$

Итак, низшая «частота» обратилась в нуль. Это соответствует степени свободы, реализуемой при вращении системы как твердого тела. Единственной частотой, отличной от нуля, оказалась частота  $k = k_2$ . Обобщая подобные случаи, приходим к важному выводу: **число собственных частот, отличных от нуля, равно числу позиционных координат.**

Интересно, что при  $J_1 \gg J_2$

$$k = \sqrt{[c(1 + J_2 / J_1)] / J_2} \approx \sqrt{c / J_2},$$

что отвечает собственной частоте крутильной системы при заземлении левого конца, т.е. при  $q_1 = 0$ . Отсюда следует, что относительно большие массы и моменты инерции при частотном анализе эквивалентны заземлению (заделке) соответствующего сечения. При  $J_1 = J_2 = J$  согласно (4.41) имеем  $k = \sqrt{2c / J}$ . В этом случае узел колебаний располагается в среднем сечении, что приводит к эффекту двукратного увеличения коэффициента жесткости элемента.

#### 4.9. Нормальные (главные) координаты

Снова обратимся к колебательной системе с двумя степенями свободы (см. п.4.4). Решение (4.28) имеет следующую структуру:  $q_1 = \theta_1 + \theta_2$ ;  $q_2 = \beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_2$ . Это наводит на мысль перейти от обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  к новым координатам  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Тогда после подстановки в (3.2), (3.5) при  $H = 2$  и  $A_{ik} = a_{ik} = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} T &= 0,5[a_{11}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + a_{22}(\beta_1\dot{\theta}_1 + \beta_2\dot{\theta}_2)^2 + 2a_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(\beta_1\dot{\theta}_1 + \beta_2\dot{\theta}_2)] = \\ &= 0,5(a_1\dot{\theta}_1^2 + a_2\dot{\theta}_2^2 + 2a_*\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2); \\ V &= 0,5[c_{11}(\theta_1 + \theta_2)^2 + c_{22}(\beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2)^2 + 2c_{12}(\theta_1 + \theta_2)(\beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2)] = \\ &= 0,5(c_1\theta_1^2 + c_2\theta_2^2 + 2c_*\theta_1\theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Здесь принято

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_{11} + 2\beta_1a_{12} + \beta_1^2a_{22}; \\ a_2 &= a_{11} + 2\beta_2a_{12} + \beta_2^2a_{22}; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c_1 &= c_{11} + 2\beta_1c_{12} + \beta_1^2c_{22}; \\ c_2 &= c_{11} + 2\beta_2c_{12} + \beta_2^2c_{22}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\left. \begin{aligned} a_* &= a_{11} + (\beta_1 + \beta_2)a_{12} + \beta_1\beta_2a_{22}; \\ c_* &= c_{11} + (\beta_1 + \beta_2)c_{12} + \beta_1\beta_2c_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Примем коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  в качестве двух неизвестных параметров в системе уравнений, полученной из (4.44) при  $a_* = 0$ ,  $c_* = 0$ . Для решения этой системы уравнений воспользуемся подстановкой  $\beta_1 + \beta_2 = y_1$ ,  $\beta_1\beta_2 = y_2$ . Тогда

$$y_1 = \frac{a_{22}c_{11} - a_{11}c_{22}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}; \quad y_2 = \frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}.$$

На основании формул Виета, запишем следующее квадратное уравнение:

$$\beta^2 - y_1\beta + y_2 = 0,$$

корнями которого являются искомые неизвестные  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Как и следовало ожидать, эти неизвестные совпадают с коэффициентами формы.

Далее, подставляя (4.43) в уравнения Лагранжа (3.6), имеем

$$\left. \begin{aligned} a_1\ddot{\theta}_1 + c_1\theta_1 &= P_1; \\ a_2\ddot{\theta}_2 + c_2\theta_2 &= P_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Новые зависимости для обобщенных сил легко определяются из условия баланса работ на возможных перемещениях:

$$\begin{aligned} \delta W &= Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 = Q_1\delta(\theta_1 + \theta_2) + Q_2\delta(\beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2) = \\ &= (Q_1 + \beta_1Q_2)\delta\theta_1 + (Q_1 + \beta_2Q_2)\delta\theta_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$P_1 = Q_1 + \beta_1 Q_2; \quad P_2 = Q_1 + \beta_2 Q_2. \quad (4.46)$$

В новых координатах, называемых **нормальными** или **главными**, каждая из них  $\theta_1$  и  $\theta_2$  определяется из соответствующего дифференциального уравнения второго порядка, а не из системы уравнений, что, разумеется, намного проще.

Согласно (4.45) собственные частоты находятся как  $k_1 = \sqrt{c_1/a_1}$ ;  $k_2 = \sqrt{c_2/a_2}$ .

Так, для примера, рассмотренного в п.4.4, имеем  $a_{11} = a_{22} = m$ ;  $a_{12} = 0$ ;  $c_{11} = c_{22} = 2c$ ;  $c_{12} = -c$ ;  $\beta_1 = 1$ ;  $\beta_2 = -1$ . Отсюда согласно (4.43)  $a_1 = a_2 = 2m$ ;  $c_1 = 2c$ ;  $c_2 = 6c$ , а следовательно,  $k_1 = \sqrt{c/m}$ ;  $k_2 = \sqrt{3c/m}$ , что, естественно, совпадает с результатом, полученным выше.

При переходе к нормальным координатам для систем с  $N$  степенями свободы удобно пользоваться матричной формой решения. При этом инерционные и квазиупругие коэффициенты  $\mathbf{a}_r$  и  $\mathbf{c}_r$  определяются как

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{a}] [\boldsymbol{\beta}] &= \text{diag}\{a_1, \dots, a_N\}; \\ [\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] &= \text{diag}\{c_1, \dots, c_N\}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

а новые обобщенные силы –

$$P_r = \sum_{i=1}^N Q_i \beta_{ir}. \quad (4.48)$$

(Коэффициенты формы  $\beta_{ir}$  – см. п.4.4.)

После решения дифференциальных уравнений вида (4.45) исходные обобщенные координаты определяются следующим образом:

$$q_i = \sum_{r=1}^N \beta_{ir} \theta_r. \quad (4.49)$$

В заключение подчеркнем, что нормальные координаты не имеют физического смысла, т.е. не соответствуют в общем случае перемещению какого-либо реального элемента системы. Их использование – это просто удобный способ преобразования исходной системы уравнений, облегчающий анализ и инженерные расчеты. В частности, с помощью нормальных координат можно более корректно учесть гистерезисные диссипативные силы (см. гл.9).

#### 4.10. Определение собственных частот и форм крутильных колебаний систем с распределенными параметрами

Методику анализа свободных колебаний крутильной колебательной системы проиллюстрируем на простейшем примере вала с заземленным концом (рис.4.9,а). При решении задач динамики машин такая модель нередко встречается, когда на одном из концов вала расположены детали с относительно большими моментами инерции (см. п.4.8).

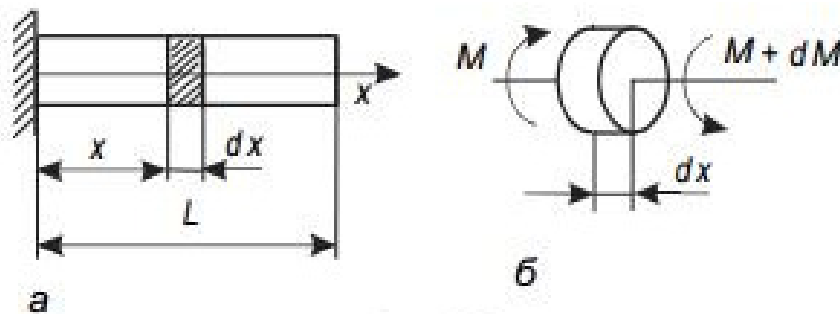


Рис. 4.9

Выделим элементарный диск длиной  $dx$  (рис. 4.9,б), момент инерции которого равен  $(J/L)dx$ , и запишем дифференциальное уравнение вращательного движения этого элемента:

$$(J/L)(\partial^2 \varphi / \partial t^2) = M + dM - M, \quad (4.50)$$

где  $\varphi(x, t)$  – текущий угол закручивания вала.

Как известно из курса сопротивления материалов,  $M = GI_p \partial \varphi / \partial x$ , где  $G$  – модуль сдвига,  $I_p$  – полярный момент инерции сечения. После подстановки в (4.50) получаем

$$GI_p (\partial^2 \varphi / \partial x^2) - (J/L)(\partial^2 \varphi / \partial t^2) = 0. \quad (4.51)$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, решение которого ищем в форме

$$\varphi = A(x) \sin(kt + \alpha). \quad (4.52)$$

Обратим внимание, что в отличие от формы решения, ранее использованной для системы с сосредоточенными параметрами, амплитуда свободных колебаний  $A$  зависит от координаты сечения  $x$ . Подставляя (4.52) в (4.51), полу-

чаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной  $x$

$$A'' + \sigma^2 A = 0. \quad (4.53)$$

Здесь  $\sigma^2 = Jk^2 / (GI_p L)$ ; штрихом обозначена производная по  $x$ .

Решение уравнения (4.53) имеет вид

$$A = C_1 \cos \sigma x + C_2 \sin \sigma x. \quad (4.54)$$

Для определения констант  $C_1$  и  $C_2$  зададим граничные условия. При  $x = 0$  имеем  $A = 0$ , отсюда  $C_1 = 0$ . Тогда  $A = C_2 \sin \sigma x$ . При  $x = L$  момент  $M(L) = 0$ . Следовательно,  $(\partial \varphi / \partial x)(L) = 0$ ; при этом  $A'(L) = C_2 \sigma \cos \sigma L = 0$ . Из этого условия вытекает, что либо  $C_2 = 0$ , либо  $\cos \sigma L = 0$ . В первом случае согласно (4.54) колебания отсутствуют, что соответствует так называемому тривиальному решению. При нетривиальном решении  $A(x) = 0$  остается принять  $\cos \sigma L = 0$ .

Это уравнение имеет смысл частотного уравнения, корнями которого являются

$$\sigma_r L = 0,5\pi(2r - 1) \quad (r = 1, \dots, \infty). \quad (4.55)$$

Отсюда собственные частоты определяются как

$$k_r = 0,5(2r - 1)\pi \sqrt{(GI_p) / (JL)}. \quad (4.56)$$

Поскольку система с распределенными параметрами имеет бесконечное число степеней свободы, число собственных частот также оказалось неограниченным.

Для однородного стержня массовый и полярный моменты инерции связаны зависимостью  $J = \rho LI_p$ , где  $\rho$  – плотность материала. При этом формула (4.56) принимает вид

$$k_r = 0,5(2r - 1)\pi L^{-1} \sqrt{GI / \rho}.$$

Таким образом, собственные частоты не зависят от диаметра вала. Однако, при расчете приводов машин нередко приходится учитывать моменты инерции деталей, распределенные вдоль оси вала, которые увеличивают инерционные характеристики системы, оставляя неизменными жесткость вала. В подобных случаях следует пользоваться формулой (4.56).

Форма колебаний характеризует распределение амплитуд вдоль  $x$  при фиксированной собственной частоте  $k_r$ . Поэтому при определении форм на основании решения  $A_r = C_2 \sin \sigma_r x$  амплитуда колебаний в одном из сечений мо-

жет быть задана произвольно, например,  $A_r^0(L) = 1$ . Тогда на основании (4.54), (4.55)

$$A_r^0(x) = \sin[0,5\pi L^{-1}(2r-1)x]. \quad (4.57)$$

Здесь индекс «0» использован для того, чтобы отличать форму колебаний от истинного значения  $A_r(x)$ , для определения которого необходимо задать начальные условия, как это мы делали ранее для систем с сосредоточенными параметрами (см. п.4.1).

Ряд первых форм колебаний, построенных по формуле (4.57), приведен на рис.4.10. С ростом номера частоты  $r$  увеличивается число узлов колебаний, причем при  $r = 1$  форма колебаний является безузловой.

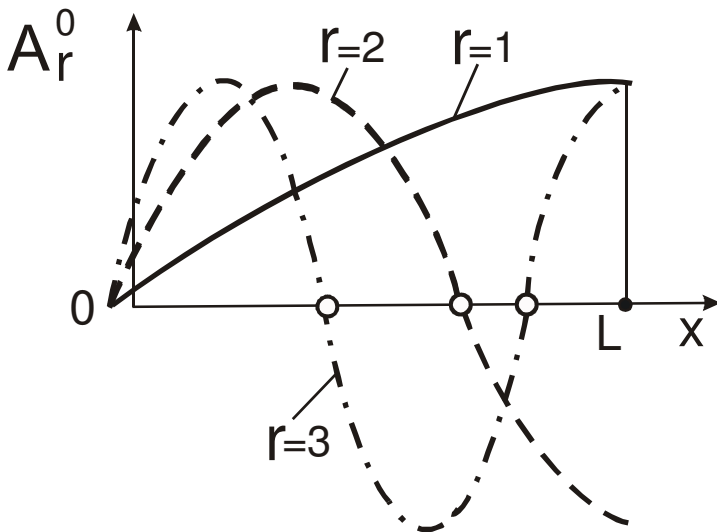


Рис.4.10

С помощью приведенного метода могут быть решены многие задачи частотного анализа систем с распределенными параметрами, различающиеся видом граничных условий, а также задачи смешанного типа, когда в системе наряду с «распределенными» элементами имеются и «сосредоточенные» (см., например, рис.2.3,а).

Для моделей с распределенными параметрами решение может быть разложено по так называемым собственным функциям [1],[9]. Этот прием, аналогичный представлению решения в нормальных координатах в системах с конечным числом степеней свободы, во многих случаях существенно облегчает анализ.

В заключение отметим, что полученные зависимости могут быть при соответствующей корректировке упругих характеристик использованы для расчета колебаний стержней некруглого сечения. Приближенность такого подхода состоит в том, что не учитываются силы инерции, возникающие при нарушении плоской формы (депланации) сечений стержня. Для тонкостенных стержней открытого профиля пренебрежение продольными смещениями при колебаниях является недопустимым.

#### 4.11. Определение собственных частот и форм изгибных колебаний систем с распределенными параметрами

Методику решения поставленной задачи проиллюстрируем на нескольких примерах. Сначала обратимся к модели шарнирно опертой балки (рис.4.11,а). Из курса сопротивления материалов известно, что в соответствии с технической теорией изгиба

$$EIy'' = M; \quad EIy''' = Q; \quad EIy^{(IV)} = q_H,$$

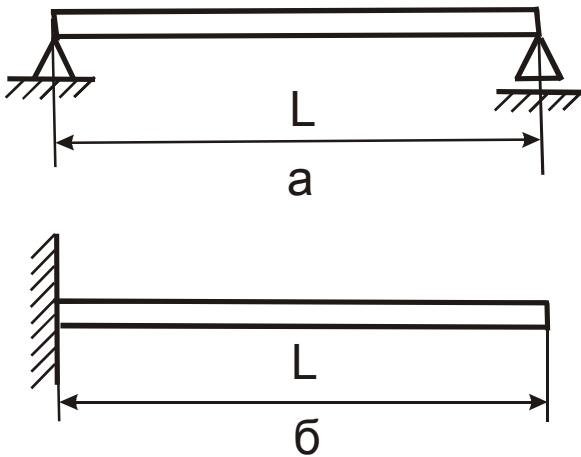


Рис.4.11

где  $E$  – модуль упругости;  $I$  – экваториальный момент инерции сечения;  $M$  – изгибающий момент;  $Q$  – поперечная сила;  $q_H$  – распределенная нагрузка;  $y$  – деформация, т.е. координата, характеризующая в данном случае колебания;  $()' = \partial/\partial x$ .

Чтобы описать колебания, примем во внимание, что согласно принципу Даламбера балка «нагружена» распределенной инерционной нагрузкой  $q_H = -mL^{-1}(\partial^2 y/\partial t^2)$ , где  $m, L$  –

масса балки и длина пролета.

Итак, дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания балки, на основании вышеизложенного имеет вид

$$EI(\partial^4 y/\partial x^4) + mL^{-1}(\partial^2 y/\partial t^2) = 0. \quad (4.58)$$

После подстановки в (4.58)  $y = A(x)\sin(kt + \alpha)$  и элементарных упрощений получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно амплитуды  $A(x)$ :

$$A^{(IV)} - \sigma^4 A = 0, \quad (4.59)$$

где  $\sigma^4 = mk^2/(EIL)$ .

Решение уравнения (4.59) представим как

$$A = C_1 \cos \sigma x + C_2 \sin \sigma x + C_3 \operatorname{ch} \sigma x + C_4 \operatorname{sh} \sigma x, \quad (4.60)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные.

Для рассматриваемой балки в сечениях, расположенных на опорах ( $x = 0$ ,  $x = L$ ), перемещения  $y$  и момент  $M$  обращаются в нуль, что отвечает следующим граничным условиям:

$$A(0) = 0; A''(0) = 0; A(L) = 0; A''(L) = 0.$$

Дважды продифференцируем (4.60):

$$A'' = -C_1\sigma^2 \cos \sigma x - C_2\sigma^2 \sin \sigma x + C_3\sigma^2 \operatorname{ch} \sigma x + C_4\sigma^2 \operatorname{sh} \sigma x. \quad (4.61)$$

Подстановка граничных условий при  $x = 0$  в (4.60) и (4.61) дает  $C_1 + C_3 = 0$ ;  $-C_1 + C_3 = 0$ . Отсюда следует  $C_1 = 0$ ,  $C_3 = 0$ ; при этом в выражениях (4.60) и (4.61) сохраняются лишь две неизвестные  $C_2$  и  $C_4$ , для определения которых используем граничные условия в сечении  $x = L$ ,

$$\left. \begin{aligned} C_2 \sin \sigma L + C_4 \operatorname{sh} \sigma L &= 0; \\ -C_2 \sin \sigma L + C_4 \operatorname{sh} \sigma L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

В этой однородной системе алгебраических уравнений относительно  $C_2$  и  $C_4$  нетривиальному решению ( $C_2 \neq 0$ ,  $C_4 \neq 0$ ) отвечает равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \sin \sigma L & \operatorname{sh} \sigma L \\ -\sin \sigma L & \operatorname{sh} \sigma L \end{vmatrix} = 0. \quad (4.63)$$

Отсюда  $2 \sin \sigma L \operatorname{sh} \sigma L = 0$ . Поскольку при  $\sigma L = 0$  гиперболический синус в нуль не обращается, получаем частотное уравнение в виде

$$\sin \sigma L = 0, \quad (4.64)$$

решением которого служит  $\sigma_r L = r\pi$ . Тогда

$$k_r = \sigma_r^2 \sqrt{EI/m} = r^2 \pi^2 \sqrt{(EI)/(mL^3)} \quad (r = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.65)$$

Для определения форм колебания предварительно выразим  $C_4$  через  $C_2$  с помощью любого из уравнений системы (4.62):  $C_4 = \pm C_2 \sin \sigma L / \operatorname{sh} \sigma L$ . Отсюда согласно (4.64)  $C_4 = 0$ . Следовательно, на основании (4.60)

$$A = C_2 \sin \sigma x. \quad (4.66)$$

Константа  $C_2$  определяется с помощью граничных условий, заданных в произвольном сечении при  $x = 0$ ,  $x = L$ . Однако, поскольку форма колебаний  $A_r^0$  для данной частоты характеризует лишь распределение амплитуд вдоль оси  $x$ , при определении форм колебаний эта константа может быть задана произвольно, например,  $C_2 = 1$ . Тогда

$$A_r^0 = \sin \sigma_r x. \quad (4.67)$$

Остановимся еще на одном распространенном примере – модели консольной балки (см. рис.4.11,б). С подобной моделью приходится сталкиваться при анализе колебаний шпинделей, веретен и во многих других технических приложениях. От предыдущего примера данная модель отличается лишь граничными условиями:  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = \varphi(0) = 0$ ;  $M(L) = 0$ ;  $Q(L) = 0$  (здесь  $\varphi$  – угол поворота сечения). Этим условиям отвечает

$$A(0) = 0; A'(0) = 0; A''(L) = 0; A'''(L) = 0. \quad (4.68)$$

Используя решение (4.60), после подстановки в (4.68) получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0; \\ C_2 + C_4 &= 0; \\ -C_1 \cos \sigma L - C_2 \sin \sigma L + C_3 \operatorname{ch} \sigma L + C_4 \operatorname{sh} \sigma L &= 0; \\ C_1 \sin \sigma L - C_2 \cos \sigma L + C_3 \operatorname{sh} \sigma L + C_4 \operatorname{ch} \sigma L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Выразим из первых двух уравнений  $C_3$  и  $C_4$  через  $C_1$  и  $C_2$  и подставим в последние два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} C_1(\cos \sigma L + \operatorname{ch} \sigma L) + C_2(\sin \sigma L + \operatorname{sh} \sigma L) &= 0; \\ C_1(\sin \sigma L - \operatorname{sh} \sigma L) - C_2(\cos \sigma L + \operatorname{ch} \sigma L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

При  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 \neq 0$  определитель системы (4.70) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma L + \operatorname{ch} \sigma L & \sin \sigma L + \operatorname{sh} \sigma L \\ \sin \sigma L - \operatorname{sh} \sigma L & -(\cos \sigma L + \operatorname{ch} \sigma L) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.71)$$

Раскрывая этот определитель и произведя элементарные преобразования, получаем частотное уравнение в виде

$$\cos \sigma L \operatorname{ch} \sigma L = -1. \quad (4.72)$$

Уравнение (4.72) имеет неограниченное число корней  $\sigma_r$ , которым отвечают собственные частоты

$$k_r = \sigma_r^2 \sqrt{EIL/m} \quad (r = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.73)$$

При  $r = 1$  корнем уравнения (4.72) является  $\sigma_1 L = 1,875$ ; при  $r = 2$  –  $\sigma_2 L = 4,694$ ; при  $r > 2$   $\sigma_r L \approx (2r - 1)\pi/2$ .

Для определения форм колебаний так же, как и в предыдущем примере, следует с помощью (4.69) и (4.70) выразить три константы через одну, например  $C_1$ , а затем, задав эту константу произвольно, подставить в (4.60).

Интересно, что, установив дополнительную опору в сечении  $x = L$ , мы существенно повысим собственные частоты, поскольку при этом  $\sigma_1 L = 3,927$ ,  $\sigma_2 L = 7,069$ . Это означает, что первая собственная частота увеличится в 4,387 раз, а вторая – в 2,268 раз.

## ГЛАВА 5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 5.1. Построение общего решения при произвольной вынуждающей силе

В этом параграфе применительно к анализу вынужденных колебаний мы напомним некоторые сведения из теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(t). \quad (5.1)$$

Данное уравнение является математической моделью системы с одной степенью свободы, однако, как показано в п.4.9, при  $b = 0$  и использовании нормальных координат к уравнению такого вида приводятся колебательные системы с любым конечным числом степеней свободы. Уравнение (5.1) при переносе членов из левой части уравнения в правое отвечает условиям кинетостатического равновесия инерционной ( $-a\ddot{q}$ ), диссипативной ( $-b\dot{q}$ ), восстанавливающей ( $-cq$ ) и вынуждающей ( $F$ ) сил.

Поделив все члены уравнения (5.1) на  $a$ , запишем его в следующем виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = W(t), \quad (5.2)$$

где  $b/a = 2n$ ;  $c/a = k^2$ ;  $F/a = W$ .

Сначала рассмотрим случай, когда отсутствует сила сопротивления ( $b = 0$ ,  $n = 0$ ). Решение складывается из решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения  $Y$ :

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + Y(t). \quad (5.3)$$

Зададимся начальными условиями  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ . Тогда  $q_0 = C_1 + Y(0)$ ;  $\dot{q}_0 = C_2 k + \dot{Y}(0)$ , следовательно,

$$q = \underbrace{q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt}_1 - \underbrace{Y(0) \cos kt - \frac{\dot{Y}(0)}{k} \sin kt}_2 + \underbrace{Y(t)}_3. \quad (5.4)$$

Группа слагаемых  $1$  описывает свободные колебания, частота которых равна собственной частоте, а амплитуда зависит от начальных условий. Группа слагаемых  $2$  определяет так называемые сопровождающие колебания, частота которых также равна собственной частоте. В отличие от свободных колебаний, амплитуда здесь не зависит от начальных условий, а определяется разрывами

частного решения и его производной при  $t = 0$ . Наконец, слагаемое  $Z$  соответствует вынужденным колебаниям, зависящим как от параметров вынуждающей силы, так и от параметров колебательной системы.

Частное решение  $Y$  может быть представлено в различной форме. Известна интегральная форма частного решения [1,9,12\*]

$$Y^D = k^{-1} \int_0^t W(u) \sin(t-u) du, \quad (5.5)$$

называемая иногда формулой Дюамеля. Заметим, что при использовании этой формулы  $Y^D(0) = 0$ ;  $\dot{Y}^D(0) = 0$ , поэтому сопровождающие колебания выявляются после процедуры интегрирования (5.5). Таким образом, интеграл Дюамеля описывает как вынужденные, так и сопровождающие колебания. Если правая часть (5.2) представлена в виде полинома, гармонической или экспоненциальной функции, частное решение может быть найдено в более наглядной форме, не требующей интегрирования (см. п.5.2).

При действии силы линейного сопротивления ( $b \neq 0$ ,  $n \neq 0$ ) воспользуемся подстановкой Эйлера  $q = q_1 e^{-nt}$ . При этом  $\dot{q} = e^{-nt} (\dot{q}_1 - nq_1)$ ;  $\ddot{q} = e^{-nt} (\ddot{q}_1 + n^2 q_1 - 2n\dot{q}_1)$ . После подстановки в (5.2) получаем

$$\ddot{q}_1 + k_1^2 q_1 = W_1(t), \quad (5.6)$$

где  $k_1^2 = k^2 - n^2$  (обычно  $\delta = n/k \ll 1$ ,  $k_1 \approx k$ );  $W_1 = We^{nt}$ .

Таким образом, задача сведена к вышерассмотренному случаю. Возвращаясь к исходной переменной, на основании (5.4)

$$q = e^{-nt} \left[ q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - Y_1(0) \cos kt - \frac{\dot{Y}_1(0)}{k} \sin kt \right] + Y_1(t). \quad (5.7)$$

Здесь  $Y_1$  – частное решение уравнения (5.2). В интегральной форме частное решение  $Y_1^D$  имеет вид ( $Y_1^D(0) = 0$ ;  $\dot{Y}_1^D(0) = 0$ )

$$Y_1^D = k_1^{-1} \int_0^t W(u) e^{-n(t-u)} \sin k(t-u) du. \quad (5.8)$$

## 5.2. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при гармонической вынуждающей силе

Конкретизируем общие положения, изложенные в п.5.1, для случая гармонической силы  $F = F_0 \cos \omega t$ . При этом  $W = W_0 \cos \omega t$ , где  $W_0 = F_0 / a$ . Частное

решение ищем в виде  $Y = A \cos \omega t$ , где  $A$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота вынужденных колебаний. Подставив  $Y$  в (5.2), при  $n = 0$  получаем

$$A = W_0 / (k^2 - \omega^2). \quad (5.9)$$

Тогда согласно (5.4)

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - \frac{W_0}{k^2 - \omega^2} \cos kt + \frac{W_0}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (5.10)$$

Поведение системы при  $\omega = k$  остается пока неопределенным, так как амплитуда последних двух слагаемых обращается в бесконечность с противоположными знаками. При рассмотрении поведения системы в окрестности этого режима можно, не теряя общности, исключить из рассмотрения свободные колебания, приняв  $q_0 = 0$ ,  $\dot{q}_0 = 0$ .

**Режим биений** ( $\omega \approx k$ ). На основании (5.10) имеем

$$q = \frac{W_0}{k^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos kt) = \frac{2W_0}{k^2 - \omega^2} \sin \frac{(k - \omega)t}{2} \sin \frac{(k + \omega)t}{2}. \quad (5.11)$$

Функция  $B(t) = 2W_0(k^2 - \omega^2)^{-1} \sin 0,5(k - \omega)t$  характеризует огибающую колебательного процесса (рис. 5.1), амплитуда которой попеременно возрастает и убывает. Такой режим называют **биениями**. Период биений  $\tau_b$  легко определить исходя из очевидного равенства  $\tau_b(k - \omega)/2 = \pi$ ; тогда

$$\tau_b = 2\pi / (k - \omega).$$

При  $\omega \rightarrow k$  имеем  $\tau_b \rightarrow \infty$ .

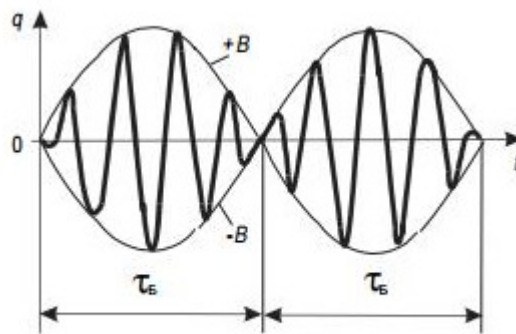


Рис. 5.1

**Резонанс** ( $\omega = k$ ). В этом случае формула (5.11) дает неопределенность, для раскрытия которой представим  $q(t)$  в следующем виде:

$$q = \frac{W_0 t}{k + \omega} \frac{\sin 0,5(k - \omega)t}{0,5(k - \omega)t} \sin 0,5(k + \omega)t.$$

Поскольку  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sin \alpha / \alpha) = 1$ , при  $\omega \rightarrow k$  получаем

$$q = [W_0 t / (2k)] \sin kt. \quad (5.12)$$

Таким образом, при отсутствии силы сопротивления резонансная амплитуда нарастает по линейному закону, поэтому при быстром пересечении резонансной зоны можно избежать аварийных последствий. Это обычно реализуется при разгоне машин и в меньшей степени – при выбеге.

### 5.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при гармонической вынуждающей силе и линейной силе сопротивления

В этом случае дифференциальное уравнение имеет вид (5.2), решение которого представлено в форме (5.7). При этом  $F = F_0 \cos \omega t$  и  $W = W_0 \cos \omega t$ , где  $\omega$  – частота вынуждающей силы. Согласно (5.7) при  $t \rightarrow \infty$  (а практически достаточно быстро) свободные и сопровождающие колебания затухают, и в системе сохраняются лишь вынужденные колебания. Частное решение будем искать в форме

$$Y = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t. \quad (5.13)$$

После подстановки в (5.2) имеем

$$\begin{aligned} & \left[ (k^2 - \omega^2) A_c + 2n\omega A_s \right] \cos \omega t + \left[ -2n\omega A_c + (k^2 - \omega^2) A_s \right] \sin \omega t = \\ & = W_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - \omega^2) A_c + 2n\omega A_s &= W_0; \\ -2n\omega A_c + (k^2 - \omega^2) A_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

После решения этой системы линейных алгебраических уравнений получаем

$$A_c = \frac{(k^2 - \omega^2)W_0}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; \quad A_s = \frac{2n\omega W_0}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (5.16)$$

Если принять  $A_c = A \cos \gamma$ ,  $A_s = A \sin \gamma$ , то согласно (5.13)

$$Y = A \cos(\omega t - \gamma), \quad (5.17)$$

где

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2} = \frac{W_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}; \quad (5.18)$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (5.19)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называют *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)*, а фазовый сдвиг между вынужденными колебаниями и вынуждающей силой  $\gamma(\omega)$  – *фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)*.

При резонансе ( $\omega = k$ ) согласно (5.16)  $A_c = 0$ ,  $A = A_s = W_0 / (2nk)$ , следовательно, вынужденные колебания по фазе отстают от вынуждающей силы на  $\gamma = \pi/2$ . Можно показать, что процесс установления резонансной амплитуды происходит по закону  $B(t) = A(1 - e^{-nt})$ . Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  (а практически достаточно быстро)  $B(t) \rightarrow A = \text{const}$ . При  $n \rightarrow 0$  после раскрытия неопределенности получаем  $B(t) = W_0 t / (2k)$ , что отвечает формуле (5.12).

#### 5.4. Исследование амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик

При анализе АЧХ и ФЧХ и в инженерных расчетах более предпочтительна безразмерная форма зависимостей (5.18) и (5.19). С этой целью введем в рассмотрение коэффициент динамичности  $\alpha$ , равный отношению амплитуды вынужденных колебаний  $A$  к так называемой статической амплитуде  $A_{\text{ст}} = F_0 / c$ . Статическая амплитуда – это деформация системы под действием амплитудного значения вынуждающей силы, приложенной в статических условиях. Согласно (5.18)

$$\alpha = \frac{A}{A_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4z^2\delta^2}}, \quad (5.20)$$

где  $z = \omega/k$  – коэффициент частотной расстройки, равный отношению частоты вынуждающей силы к собственной частоте;  $\delta = n/k = \lambda/(2\pi)$  – коэффициент демпфирования (см. п.4.2).

Функции  $\alpha(z)$ , являющейся безразмерной формой АЧХ, отвечает кривая, показанная на рис.5.2.

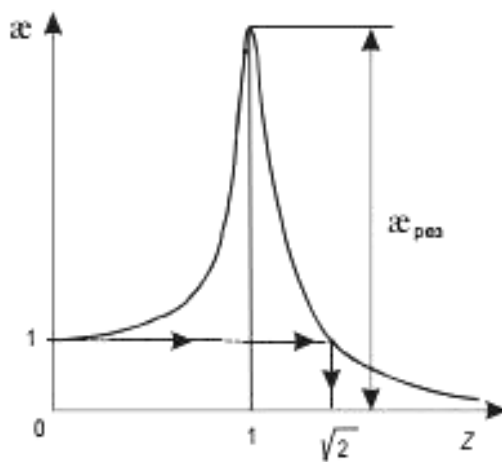


Рис. 5.2

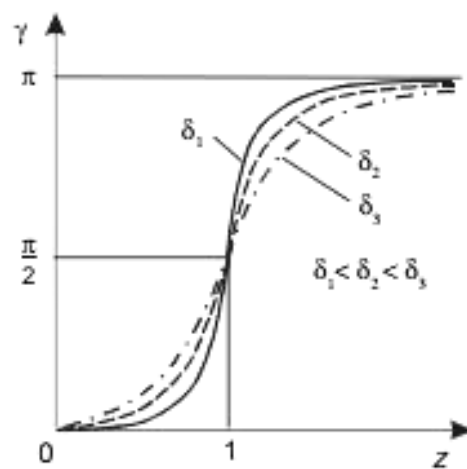


Рис. 5.3

При  $z=0$  ( $\omega=0$ ) имеем  $\alpha=1$ . С ростом  $z$  функция  $\alpha(z)$  сначала возрастает, достигая максимума в окрестности резонанса ( $z \approx 1$ ). Значению  $\alpha_{\max}$  отвечает минимум подкоренного выражения знаменателя формулы (5.20). Легко убедиться, что

$$\alpha_{\max} = \alpha(z_*) = 1/(2\delta\sqrt{1-\delta^2}), \quad (5.21)$$

где  $z_* = \sqrt{1-\delta^2}$ .

При  $z=1$  (резонанс)

$$\alpha_{\text{рез}} = 1/(2\delta), \quad (5.21)$$

Принимая во внимание, что обычно  $\delta < (0,1 \div 0,2)$ , можно утверждать, что  $\alpha_{\max} \approx \alpha_{\text{рез}}$ . Однако при больших значениях  $\delta$  ( $\delta^2 > 0,5$ ), что принципиально возможно при установке специальных демпфирующих устройств или учета ха-

характеристик двигателей, функция  $\alpha(z)$  не имеет экстремума и является убывающей.

В зарезонансной зоне ( $z > 1$ ) функция  $\alpha(z)$  асимптотически стремится к нулю. Без учета линейной силы сопротивления ( $\delta = 0$ ) согласно (5.20)

$$\alpha(z) = 1/|1 - z^2|. \quad (5.23)$$

Анализ зависимостей (5.20) и (5.23) показывает, что при малых  $\delta$  диссипативные факторы играют определяющую роль лишь непосредственно в резонансной зоне; при  $z < 0,7$  и  $z > 1,4$  результаты практически совпадают, поэтому в нерезонансных зонах нередко пользуются более простой зависимостью (5.23).

Интересно, что при  $z > \sqrt{2}$  имеем  $\alpha(z) < 1$ . Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается меньше, чем статическая амплитуда, реализуемая в окрестности  $\omega = 0$ . Это обстоятельство используется с целью виброизоляции колебательных систем (см. п.6.5).

Фазо-частотная характеристика (5.19) также может быть выражена через безразмерный параметр – коэффициент частотной расстройки  $z$ :

$$\gamma = \arctg[2\delta z/(1-z^2)]. \quad (5.24)$$

Семейство кривых  $\gamma(z)$  приведено на рис.5.3. При малом демпфировании ( $\delta < 1$ ) в дорезонансной зоне фаза вынужденных колебаний практически совпадает с фазой вынуждающей силы ( $\gamma \approx 0$ ), а в зарезонансной зоне эти фазы смещены на  $\pi$ . При резонансе ( $z = 1$ )  $\gamma = \pi/2$ .

Итак, вынужденные колебания могут быть рассчитаны следующим образом:

$$Y = A \cos(\omega t - \gamma), \quad (5.25)$$

где  $A = A_{cr} \alpha$ ;  $A_{cr} = F_0/c$ ;  $\alpha(z)$  – АЧХ (см. формулу (5.20)),  $\gamma(z)$  – ФЧХ (см. формулу (5.24)).

## 5.5. Кинематическое возмущение

При кинематическом возмущении какая-либо точка или сечение системы получает принудительное движение по заданному закону. Так, например, для модели подрессоренного экипажа (рис.5.4,а) источником возмущений является профиль дороги, а для толкателя кулачкового механизма (рис.5.4,б) – закон движения, определяемый профилем кулачка.

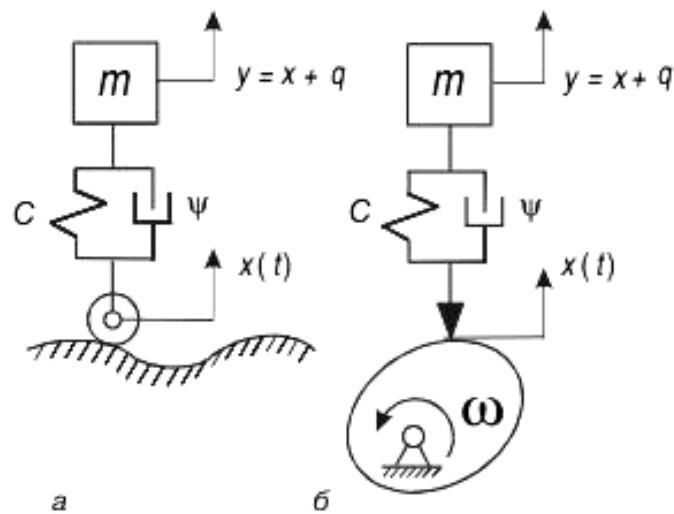


Рис. 5.4

В обоих примерах входное сечение колебательной системы перемещается по закону  $x(t)$ ; при этом перемещение ведомой массы  $m$  складывается из переносного движения  $x(t)$  и относительного —  $q(t)$ , вызванного возбуждаемыми колебаниями. Соответствующее дифференциальное уравнение при отсутствии других возмущений имеет вид

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\ddot{x}(t). \quad (5.26)$$

Итак, роль вынуждающей силы в данном случае играет сила инерции в переносном движении. Пусть  $x = x_0 \cos \omega t$ , тогда  $F = -m\ddot{x} = m\omega^2 x_0 \cos \omega t$ . Принимая  $m\omega^2 x_0 = F_0$ , мы таким образом свели задачу к ранее рассмотренной (см. п.5.3, 5.4). При этом вынужденные колебания описываются в форме (5.25), где

$$A = A_{cr} \varkappa = m\omega^2 x_0 \varkappa / c.$$

Принимая во внимание, что  $c/m = k^2$  и  $\omega/k = z$ , получаем

$$A = x_0 \varkappa(z) z^2 = x_0 \varkappa_1(z). \quad (5.27)$$

Здесь  $\varkappa_1(z) = z^2 \varkappa(z)$  — коэффициент динамичности при кинематическом возмущении (АЧХ), равный отношению амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде кинематического возмущения ( $\varkappa_1 = A/x_0$ ). При этом согласно (5.20)

$$\varkappa_1(z) = z^2 / \sqrt{(1-z^2)^2 + 4z^2 \delta^2}. \quad (5.28)$$

График  $\varkappa_1(z)$  приведен на рис.5.5. В отличие от силового возмущения  $\varkappa_1(0) = 0$ ,  $\varkappa_1(\infty) \rightarrow 1$ . Значение  $\varkappa_{\max} \approx 1/(2\delta)$ , как и при силовом возмущении, однако максимум теперь незначительно смещен в сторону  $z > 1$ . ФЧХ при кинематическом возмущении по-прежнему описывается зависимостью (5.24).

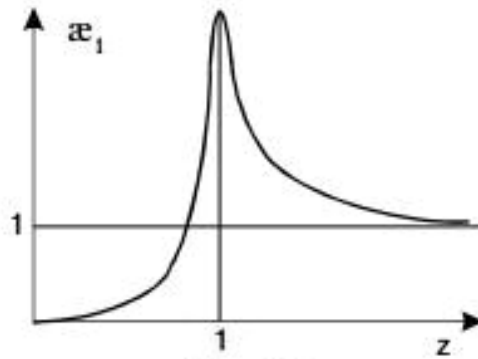


Рис. 5.5

Представляет интерес поведение системы при  $\omega > k$ . В этом случае

$$y = x + q = x_0 \cos \omega t + A \cos(\omega t - \gamma) = x_0 \cos \omega t + x_0 \varkappa_1(z) \cos(\omega t - \gamma).$$

Но при  $z > 1$  имеем  $\varkappa_1 \approx 1$  и  $\gamma \approx \pi$ , следовательно,  $y \approx 0$ . Поэтому, например, мягкие рессоры автомобилей, защищая кузов от возмущений, в существенной мере способствуют комфортной езде. Такое решение, разумеется, совершенно не приемлемо для исполнительных органов машин, которые должны совершать колебания по заданному закону движения (см. п.6.2).

### 5.6. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы при гармонической вынуждающей силе

В рассматриваемом случае система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= F_1 \cos \omega t; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= F_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Частное решение этой системы, отвечающее вынужденным колебаниям, ищем в виде  $q_1 = Y_1 = A_1 \cos \omega t$ ,  $q_2 = Y_2 = A_2 \cos \omega t$ . После подстановки в (5.29) получаем

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}\omega^2)A_1 + (c_{12} - a_{12}\omega^2)A_2 &= F_1; \\ (c_{21} - a_{21}\omega^2)A_1 + (c_{22} - a_{22}\omega^2)A_2 &= F_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Для решения этой системы воспользуемся формулой Крамера

$$A_1 = \begin{vmatrix} F_1 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ F_2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} \Delta^{-1}(\omega^2); \quad A_2 = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & F_1 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & F_2 \end{vmatrix} \Delta^{-1}(\omega^2), \quad (5.31)$$

где определитель системы

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix}. \quad (5.32)$$

При замене  $\omega$  на  $k$  определитель (5.32) совпадает с частотным определителем (4.25), поэтому при  $\omega = k_1$  и  $\omega = k_2$  имеем  $\Delta(\omega^2) = 0$ , что соответствует резонансным режимам ( $A_1 \rightarrow \infty$ ,  $A_2 \rightarrow \infty$ ). Покажем, что отношение резонансных амплитуд равно соответствующему коэффициенту формы

$$\begin{aligned} \left[ \frac{A_2}{A_1} \right]_{\omega=k_r} &= \frac{-F_1(c_{21} - a_{21}k_r^2) + F_2(c_{11} - a_{11}k_r^2)}{F_1(c_{22} - a_{22}k_r^2) - F_2(c_{12} - a_{12}k_r^2)} = \\ &= -\frac{c_{11} - a_{11}k_r^2}{c_{12} - a_{12}k_r^2} \left[ \frac{F_1(c_{21} - a_{21}k_r^2)/(c_{11} - a_{11}k_r^2) - F_2}{F_1(c_{22} - a_{22}k_r^2)/(c_{12} - a_{12}k_r^2) - F_2} \right] \quad (r = 1, 2). \end{aligned}$$

На основании формул (4.29) числитель и знаменатель сомножителя, заключенного в квадратные скобки, равны и сокращаются, а первый сомножитель равен коэффициенту формы  $\beta_r$ . Таким образом,

$$\left[ \frac{A_2}{A_1} \right]_{\omega=k_r} = \beta_r. \quad (5.33)$$

Типовые АЧХ для системы с двумя степенями свободы приведены на рис.5.6.

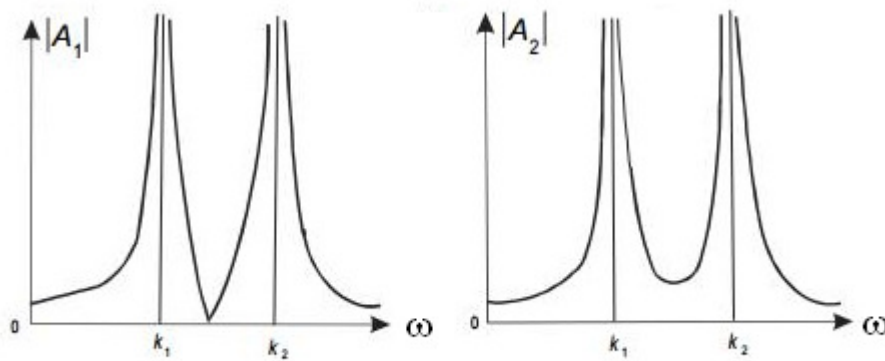


Рис. 5.6

При учете линейной силы сопротивления резонансная амплитуда оказывается ограниченной (см. п.5.12).

### 5.7. Вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы при гармонической вынуждающей силе

Методика расчета амплитуд вынужденных колебаний системы с  $N$  степенями свободы полностью совпадает с изложенной в п. 5.6. В этом случае система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{a}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \cos \omega t, \quad (5.34)$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{c}$  – квадратные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов;  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{F}$  – матрицы-столбцы (вектор-функции) обобщенных координат, обобщенных ускорений и амплитуд гармонических обобщенных сил.

Принимая  $\mathbf{q} = \mathbf{A} \cos \omega t$ , где  $\mathbf{A}$  – вектор амплитуд, после подстановки в (5.34) получаем линейную систему алгебраических уравнений

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}\omega^2)\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad (5.35)$$

корнями которой будут искомые амплитуды вынужденных колебаний. Для решения системы (5.35) могут быть использованы стандартные программы.

Для уяснения особенностей вынужденных колебаний систем с конечным числом степеней свободы рассмотрим привод машины, состоящий из двигателя  $D$ , связанного упругой муфтой с главным валом, от которого ответвляется  $s$  механизмов, каждый из которых представлен в виде подсистемы с одной степенью свободы (рис.5.7). К главному валу приложен гармонический вынуждающий момент  $M = M_1 \cos \omega t$ .

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии, приняв в качестве позиционных обобщенных координат  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) деформации уп-





одинаковых собственных частот  $k_r = p = \sqrt{c/J}$ , которые при  $H > 3$  оказываются кратными. Однако кратность частот в силу структуры квадратичных форм не приводит в данном случае к аномалии решения, связанной с появлением так называемых «вековых» членов, амплитуда которых бесконечно возрастает [9\*], [13\*]. Хотя в данном случае число различных корней в рабочем диапазоне частот и сокращается, кратные частоты нередко дают отрицательный эффект, поскольку при этом возникают биения и растет общая виброактивность привода.

### 5.8. Расчет вынужденных колебаний при периодической вынуждающей силе с помощью метода гармонического анализа

До сих пор мы анализировали вынужденные колебания при гармонической вынуждающей силе, являющейся частным случаем периодической вынуждающей силы. Приступая к рассмотрению этого более общего случая применительно к системе с одной степенью свободы, напомним, что с помощью нормальных (главных) координат (см. п.4.9) приведенная в этом и следующем параграфах методика может быть легко распространена на систему с конечным числом степеней свободы.

Дифференциальное уравнение теперь имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(t), \quad (5.40)$$

где  $F(t) = F(t + \tau)$  – периодическая вынуждающая сила;  $\tau$  – период (рис.5.9).

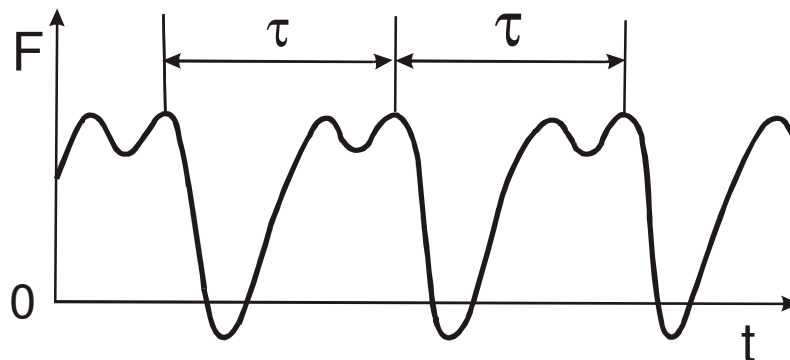


Рис.5.9

Представим функцию  $F(t)$  в виде ряда Фурье:

$$F(t) = F_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (F_{jc} \cos j\omega t + F_{js} \sin j\omega t), \quad (5.41)$$

где  $\omega = 2\pi/\tau$ ;  $F_0, F_{jc}, F_{js}$  – коэффициенты Фурье, определяемые следующим образом:

$$F_0 = \tau^{-1} \int_0^{\tau} F(t) dt; \quad F_{jc} = 2\tau^{-1} \int_0^{\tau} F(t) \cos j\omega t dt; \quad F_{js} = 2\tau^{-1} \int_0^{\tau} F(t) \sin j\omega t dt. \quad (5.42)$$

Для многих типовых случаев  $F_0, F_{jc}, F_{js}$  приводятся в справочной литературе; кроме того, имеются стандартные программы, позволяющие с помощью ЭВМ находить коэффициенты Фурье, задаваясь определенным числом частных значений функции  $F(t)$ .

При построении решения уравнения (5.40) воспользуемся **принципом суперпозиции**, справедливым для линейных систем. Применительно к данной задаче он состоит в том, что **колебания, возникающие от суммы сил, можно определять как сумму колебаний от каждой силы в отдельности**. Так как колебания при гармонической вынуждающей силе были рассмотрены выше (см. п.5.3, 5.4), задачу можно считать принципиально решенной.

Представим (5.41) в следующем виде:

$$F(t) = F_0 + \sum_{j=1}^{\infty} F_j \sin(j\omega t + \alpha_j), \quad (5.43)$$

где  $F_j = \sqrt{F_{jc}^2 + F_{js}^2}$ ;  $\cos \alpha_j = F_{js} / F_j$ ;  $\sin \alpha_j = F_{jc} / F_j$ .

Каждый из членов ряда (5.43) называют **гармоникой  $j$** . Деформация от постоянной составляющей  $F_0$  равна  $A_0 = F_0/c$ . Колебания от гармоники  $j$  вынуждающей силы определяются на основании зависимостей (5.25), (5.20), (5.24)

$$q_j = A_j \sin(j\omega t + \alpha_j - \gamma_j), \quad (5.44)$$

где  $A_j = A_{jст} \alpha_j$ ;  $\alpha_j = 1/\sqrt{(1 - j^2 z^2)^2 + 4j^2 z^2 \delta^2}$ ;  $z = \omega/k$ ;  $A_{jст} = F_j/c$  – статическая амплитуда гармоники  $j$ ;  $k = \sqrt{c/a}$ ;  $\gamma_j = \arctg[2\delta jz/(1 - j^2 z^2)]$  – фазочастотная характеристика. Окончательно имеем

$$q = F_0/c + \sum_{j=1}^{\infty} q_j. \quad (5.45)$$

При  $jz = 1$  ( $j\omega = k$ ) возникает резонанс гармоники  $j$ ; при этом  $(\alpha_j)_{рез} = 1/(2\delta)$ .

Решение (5.45) является математически точным, однако поскольку при суммировании членом ряда Фурье приходится ограничиваться конечным чис-

лом гармоник  $j_{\max}$ , с инженерных позиций оно оказывается приближенным. При выборе  $j_{\max}$  можно руководствоваться следующими соображениями. Во-первых, должны быть учтены наиболее значительные члены разложения  $F_j$ . Во-вторых, чтобы не отсеять резонансный режим  $j_{\max} > k/\omega + (1 \div 2)$ .

Отметим, что стремление сохранить в ряде Фурье большое число гармоник приводит не только к увеличению трудоемкости расчета, но и к потере точности, поскольку точность определения высших гармоник обычно не велика. Поэтому рассматриваемый способ расчета вынужденных колебаний целесообразно использовать в задачах динамики механизмов при отсутствии ударных нагрузок, а также при непрерывных и дифференцируемых функциях положения, обладающих повышенной «гладкостью». Это свойственно, например, простым рычажным механизмам и эксцентрикам, когда при расчетах можно ограничиваться малым числом учитываемых гармоник.

### 5.9. Расчет вынужденных колебаний при периодической вынуждающей силе на базе замкнутой формы решения

Наиболее естественным способом определения решения дифференциального уравнения (5.40) на первый взгляд является его интегрирование с помощью численных методов до выхода на установившийся режим. Однако такой путь приводит к значительной накопленной погрешности и повышенной трудоемкости расчета. Поэтому воспользуемся более точным и экономичным методом построения замкнутой формы решения.

Исследуем поведение системы, описываемой дифференциальным уравнением (5.40), на произвольном периоде колебаний  $0 < t < \tau$ . При этом решение описывается зависимостью (5.7), в которую входят начальные условия  $q(0) = q_0$  и  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ . Однако в данном случае начальные условия нам не известны, так как рассматриваемому периоду при установившемся колебательном режиме предшествует неограниченное число циклов. Для определения  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  воспользуемся условиями периодичности вынужденных колебаний

$$\left. \begin{aligned} q(q_0, \dot{q}_0, t = 0) &= q(q_0, \dot{q}_0, t = \tau); \\ \dot{q}(q_0, \dot{q}_0, t = 0) &= \dot{q}(q_0, \dot{q}_0, t = \tau). \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

Таким образом, мы располагаем системой двух уравнений с двумя неизвестными  $q_0$  и  $\dot{q}_0$ , после решения которой можем воспользоваться зависимостью (5.7), справедливой теперь и при установившемся режиме на произвольном периоде колебаний.

Для лучшего уяснения процедуры построения замкнутой формы решения сначала рассмотрим более простой случай, когда не учитывается линейная сила сопротивления. Согласно (5.3)

$$q_0 = q(0) = C_1 + Y(0); \quad \dot{q}_0 = \dot{q}(0) = C_2 k + \dot{Y}(0); \quad (5.47)$$

$$\left. \begin{aligned} q(\tau) &= C_1 \cos k\tau + C_2 \sin k\tau + Y(\tau); \\ \dot{q}(\tau) &= -C_1 k \sin k\tau + C_2 k \cos k\tau + \dot{Y}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

На основании (5.46) – (5.48) получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1(1 - \cos k\tau) - C_2 \sin k\tau &= \Delta Y; \\ C_1 \sin k\tau + C_2(1 - \cos k\tau) &= \Delta \dot{Y} / k, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

где  $\Delta Y = Y(\tau) - Y(0)$ ;  $\Delta \dot{Y} = \dot{Y}(\tau) - \dot{Y}(0)$ .

Решая систему уравнений (5.49), находим

$$C_1 = \frac{\Delta Y}{2} + \frac{\Delta \dot{Y}}{2k} \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2}; \quad C_2 = \frac{\Delta \dot{Y}}{2k} - \frac{\Delta Y}{2} \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2}. \quad (5.50)$$

Далее по формулам (5.47), (5.48) определяем начальные условия. Константы  $C_1$  и  $C_2$  (или одна из них) обращаются в бесконечность при  $k\tau/2 = j\pi$  ( $j=1,2,\dots$ ), что отвечает резонансным режимам ( $j\omega = k$ ). Естественно, такой же результат мы получили и при использовании метода гармонического анализа (см. п.5.8).

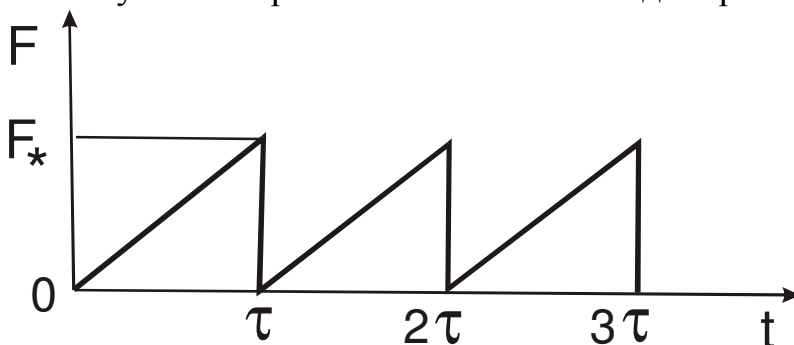


Рис.5.10

Пусть, например, периодическая вынуждающая сила имеет вид пилообразной характеристики (рис.5.10).

При  $0 < t < \tau$  частное решение имеет вид  $Y = Bt$ , где  $B = F_*/(c\tau)$ .

Тогда  $Y(0) = 0$ ;  $Y(\tau) = B\tau$ ;

$\dot{Y}(0) = \dot{Y}(\tau) = B$ ;  $\Delta Y = B\tau$ ;

$\Delta \dot{Y} = 0$ . Согласно (5.50)

$$C_1 = 0,5B\tau; \quad C_2 = -0,5B\tau \operatorname{ctg}(k\tau/2).$$

При учете линейной силы сопротивления ( $b \neq 0$ ) после аналогичных, хотя и более громоздких выкладок и некоторых упрощений получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\Delta Y [1 - \exp(-\lambda N) \cos 2\pi N] + \Delta \dot{Y} k^{-1} \exp(-\lambda N) \sin 2\pi N}{1 - 2 \exp(-\lambda N) \cos 2\pi N + \exp(-2\lambda N)}; \\ C_2 &= \frac{\Delta \dot{Y} k^{-1} [1 - \exp(-\lambda N) \cos 2\pi N] - \Delta Y \exp(-\lambda N) \sin 2\pi N}{1 - 2 \exp(-\lambda N) \cos 2\pi N + \exp(-2\lambda N)} \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

где  $N = k / \omega$ ;  $\lambda$  – логарифмический декремент.

На основании (5.51) максимальная амплитуда сопровождающих колебаний (с собственной частотой  $k$ ) определяется следующим образом:

$$D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \mu \sqrt{\Delta Y^2 + \Delta \dot{Y}^2 / k^2}, \quad (5.52)$$

где  $\mu$  – коэффициент накопления возмущений, определяемый как

$$\mu = 1 / \sqrt{1 - 2 \exp(-\lambda N) \cos 2\pi N + \exp(-2\lambda N)}. \quad (5.53)$$

Анализ этого важного динамического критерия будет проведен в п. 6.2.

В приведенном выше примере частное решение было найдено аналитическим способом. При более сложной форме описания вынуждающей силы целесообразно воспользоваться **численно-аналитическим способом**, который состоит из следующих этапов:

- численное интегрирование исходного дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях (например, методом Рунге-Кутты); при этом находим  $\Delta Y = Y(\tau)$  и  $\Delta \dot{Y} = \dot{Y}(\tau)$ ;
- определение констант  $C_1$  и  $C_2$  и начальных условий, отвечающих установившемуся режиму, по формулам (5.47), (5.51);
- повторное численное интегрирование с полученными начальными условиями.

При этом способе численным интегрированием найдены лишь отдельные промежуточные функции, вычисленные на ограниченном отрезке времени, равном одному периоду  $\tau$ , в то время как установившийся режим ( $t \rightarrow \infty$ ) определяем аналитически с помощью условий периодичности. Последнее существенно сказывается на повышении точности решения и уменьшении трудоемкости расчета.

### 5.10. Вынужденные колебания привода при учете динамической характеристики электродвигателя

Как уже отмечалось в п. 2.2, для асинхронных электродвигателей и двигателей постоянного тока установившиеся режимы работы можно исследовать с

помощью приближенной зависимости, определяющей так называемую *динамическую характеристику* электродвигателя [5],[1\*],[4\*],[7\*]:

$$\omega_d = \omega_d^0 \left[ 1 - \nu_d (M_d + T_d \dot{M}_d) \right], \quad (5.54)$$

где  $\omega_d, \omega_d^0$  – угловые скорости электродвигателя и идеального холостого хода;  $\nu_d$  – коэффициент крутизны статической характеристики;  $M_d$  – момент двигателя;  $T_d$  – электромагнитная постоянная времени двигателя, зависящая от параметров его электрической цепи.

Для асинхронных электродвигателей  $\nu_d$  и  $T_d$  определяются по следующим приближенным зависимостям:

$$T_d = 1/(2\pi f_c s_k); \quad \nu_d = s_k / (2M_n \xi).$$

где  $s_k = (1 - \omega_d^H / \omega_d^0)(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})$  – критическое скольжение;  $M_n, \omega_d^H$  – номинальные момент и угловая скорость двигателя;  $f_c$  – частота сети, Гц;  $\xi$  – отношение максимального момента к номинальному.

Исходные данные для определения  $T_d$  и  $\nu_d$  заимствуются из каталогов электродвигателей. Если в уравнении (5.54) принять  $T_d = 0$ , то характеристика называется *статической*.

Если приведенный к валу двигателя момент инерции  $J$  является постоянным, то

$$J \dot{\omega}_d = M_d - M_c, \quad (5.55)$$

где  $M_c$  – приведенный к валу двигателя момент сопротивления. Отсюда следует  $M_d = J d\omega_d / dt + M_c$  и  $dM_d / dt = J d^2\omega_d / dt^2 + dM_c / dt$ . После подстановки  $M_d$  и  $dM_d / dt$  в (5.54) получаем

$$\nu_d T_d J \ddot{\omega}_d + \nu_d J \dot{\omega}_d + \omega_d / \omega_d^0 = 1 - \nu_d (M_c + T_d \dot{M}_c). \quad (5.56)$$

Далее представим момент сопротивления  $M_c$  в виде суммы среднего значения  $M_c^*$  и переменной составляющей  $\Delta M_c(t)$ . Соответственно функцию  $\omega_d(t)$  также представим как  $\omega_d(t) = \omega_d^* + \Delta\omega_d(t)$ . Постоянная составляющая  $\omega_d^*$  определяется статической характеристикой двигателя:

$$\omega_d^* = \omega_d^0 (1 - \nu_d M_c^*). \quad (5.57)$$

При учете (5.57) перепишем уравнение (5.56) в следующем виде:

$$\Delta \ddot{\omega}_d + 2n\Delta \dot{\omega}_d + k^2 \omega_d = W(t), \quad (5.58)$$

где  $n = 0,5T_d^{-1}$ ;  $k^2 = (\nu_d T_d J \omega_d^0)^{-1}$ ;  $W(t) = -(\Delta M_c T_d^{-1} + \Delta \dot{M}_c) / J$ .

Итак, нахождение переменной составляющей угловой скорости двигателя  $\Delta \omega$ , определяющей неравномерность вращения входного звена машинного агрегата, снова свелось к решению линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, подробно исследованного в данной главе. Заметим однако, что в отличие от ранее рассмотренных случаев, когда диссипативная сила была вызвана в основном конструкционным демпфированием, параметр  $n$  здесь может оказаться соизмерим с  $k$ . Поэтому при расчете собственной частоты  $k_1$  (см. п.4.2) следует пользоваться зависимостью

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{(J \nu_d T_d \omega_d^0)^{-1} - 0,25T_d^{-2}}.$$

При  $T_d = T_d^* = 0,25\nu_d \omega_d^0 J$  собственная частота обращается в нуль. Таким образом, при  $T_d \leq T_d^*$  решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (5.58), становится аperiodическим. С увеличением  $T_d$  до значения  $T_d^{**} = 0,5\nu_d \omega_d^0 J$  величина  $k_1$  растет до своего максимального значения  $k_{1\max} = (\nu_d \omega_d^0 J)^{-1}$ ; при  $T_d > T_d^{**}$  собственная частота с ростом электромагнитной постоянной времени  $T_d$  соответственно убывает. Такой характер влияния параметра  $T_d$  связан с тем, что динамическая характеристика двигателя (5.54) соответствует модели, в которой ротор соединен с статором посредством упругого элемента с «коэффициентом» жесткости  $c_d = (\nu_d \omega_d^0 T_d)^{-1}$  и последовательно включенного демпфера, развивающего момент сопротивления, пропорциональный первой степени скорости при коэффициенте пропорциональности  $b_d = (\nu_d \omega_d^0)^{-1}$ . Поэтому при малых значениях  $T_d$  определяющую роль играет демпфер, что и приводит к возможности появления аperiodических решений; при больших значениях  $T_d$  «жесткость» убывает, и соответственно уменьшается собственная частота. Первая резонансная частота располагается в окрестности  $k_1$ .

Как показывает анализ, характеристика асинхронного двигателя и двигателя постоянного тока эквивалентна податливости упругого элемента, которая обычно существенно превосходит упругие элементы привода. Это позволяет при определении неравномерности вращения вала двигателя при  $\omega \approx k_1$ , считая в первом приближении остальную кинематическую цепь либо абсолютно жесткой, либо ограничиваясь учетом наиболее податливых элементов привода.

При анализе второго резонансного режима следует иметь в виду, что под действием номинального момента двигателя эквивалентная динамическая ошибка на входе привода соответствует деформации (0.05–1.4) рад., что, как правило, значительно превышает деформации остальных участков валопровода. Это свидетельствует о высокой эквивалентной податливости. Тогда, для инженерных оценок второй резонансной частоты можно принять  $c_d = 0$  и воспользоваться формулой (4.41), соответствующей приведенной на рис. 4.8 модели при обязательном учете момента инерции ротора двигателя.

Одним из традиционных способов уменьшения неравномерности вращения входных звеньев приводов машин является увеличение момента инерции  $J$  за счет установки маховика. Однако, как показывает анализ, увеличение  $J$  приводит к уменьшению  $\Delta\omega_d$  только в зарезонансном режиме, когда частота вынуждающего момента  $\omega > k_1$ . Если при этом с целью отстройки от резонанса принять  $\omega \geq \sqrt{2}k_1$ , то при установке маховика во всяком случае должно быть удовлетворено условие  $J > 2(\omega^2 \omega_d^0 \nu_d T_d)^{-1}$ . Далее на основании решения уравнения (5.58) может быть определен коэффициент неравномерности  $\delta_n \approx 2|\Delta\omega_d|_{\max} / \bar{\omega}_d$ , где  $\bar{\omega}_d$  – среднее значение угловой скорости двигателя.

Следует, однако, иметь в виду, что существенное увеличение момента инерции  $J$  не является желательным для переходных режимов, поскольку при этом возрастают динамические нагрузки при разбеге машины.

### 5.11. Вынужденные колебания систем с распределенными параметрами

**Крутильные колебания.** Методику расчета амплитуд вынужденных колебаний сначала проиллюстрируем на примере крутильной колебательной системы с распределенными параметрами, отвечающей валику с защемленным концом (см. рис.4.9), к другому концу которого приложен вынуждающий момент  $M_* \cos \omega t$ . При этом дифференциальное уравнение (4.51) остается неизменным, однако частное решение, определяющее вынужденные колебания, теперь ищем в форме

$$\varphi = A(x) \cos \omega t. \quad (5.59)$$

После подстановки (5.59) в (4.51) получаем дифференциальное уравнение (4.53) при

$$\sigma^2 = J \omega^2 / (GI_p L).$$

Решение дифференциального решения (4.53) имеет вид

$$A = C_1 \cos \sigma x + C_2 \sin \sigma x \quad (5.60)$$

при следующих граничных условиях:  $A(0) = 0$ ;  $M(L) = M_*$ . Первое из граничных условий дает  $C_1 = 0$ , а второе

$$\sigma G I_p C_2 \cos \sigma L = M_*.$$

После определения  $C_2$  и подстановки в (5.60) имеем

$$A(x) = \frac{M_*}{\sigma G I_p} \frac{\sin \sigma x}{\cos \sigma L} = \frac{M_* \sin \sigma x}{\omega \cos \sigma L} \sqrt{L / (J G I_p)}. \quad (5.61)$$

При  $\cos \sigma L = 0$  наступает резонанс ( $A \rightarrow \infty$ ). Согласно (4.55), (4.56) резонанс имеет место при  $\omega = k_r$ . Форма колебаний при резонансе совпадает с формой свободных колебаний.

**Изгибные колебания.** Далее обратимся к анализу изгибных вынужденных колебаний на примере модели консольной балки с распределенными параметрами (см. рис.4.11,б), к правому концу которой приложена вынуждающая сила  $F = F_0 \cos \omega t$ . Если в дифференциальное уравнение (4.58) подставить частное решение

$$y(x, t) = A(x) \cos \omega t, \quad (5.62)$$

то снова получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $A$  (4.59) при  $\sigma^4 = m\omega^2 / (E I L)$  и следующих граничных условиях:

$$A(0) = 0; \quad \frac{dA}{dx}(0) = 0; \quad \frac{d^2 A}{dx^2}(L) = 0; \quad \frac{d^3 A}{dx^3}(L) = F_0. \quad (5.63)$$

После подстановки в (5.63) решения (4.60) получаем систему алгебраических уравнений относительно  $C_1, C_2$  (см. п.4.10)

$$\left. \begin{aligned} C_1(\cos \sigma L + \operatorname{ch} \sigma L) + C_2(\sin \sigma L + \operatorname{sh} \sigma L) &= 0; \\ C_1(\sin \sigma L - \operatorname{sh} \sigma L) - C_2(\cos \sigma L + \operatorname{ch} \sigma L) &= F_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

которая отличается от аналогичной системы (4.70) значением  $\sigma$  и правой частью. Решив эту систему, определяем  $C_1$  и  $C_2$ . При этом, как и раньше, в системе (4.69),  $C_3 = -C_1$ ,  $C_4 = -C_2$ . Таким образом, решение (4.60) при  $\sigma = \sigma(\omega)$  определяет АЧХ в произвольном сечении балки. При  $\omega = k_r$ , где  $k_r$  – собствен-

ная частота, определитель системы уравнений (5.64) обращается в нуль, что отвечает резонансу ( $A \rightarrow \infty$ ).

### 5.12. Критические скорости валов. Самоцентрирование

Динамика вращающихся систем (роторов) является большим и хорошо развитым разделом механики, имеющим много технических приложений. К последним можно отнести валы, шпиндели станков, веретена текстильных машин, сушильные барабаны, центрифуги и др. В рамках данного параграфа мы ограничимся изложением лишь некоторых вводных понятий и весьма упрощенных представлений об этой большой проблеме [9], [12\*].

Рассмотрим вал с эксцентрично установленным диском, масса которого равна  $m$  (рис. 5.11,а). При вращении вала центр масс  $\mathbf{Ц}$  будет двигаться по окружности радиуса  $r = e + \Delta$ , где  $e$  – эксцентриситет;  $\Delta$  – деформация вала в рассматриваемом сечении, вызванная центробежной силой  $F_{\text{Ц}} = m\omega^2 r$  (рис. 5.11,б).

Стационарное состояние системы отвечает равенству центробежной  $F_{\text{Ц}}$  и восстанавливающей  $F_{\text{В}}$  сил. Поскольку  $|F_{\text{В}}| = c\Delta$ ,

$$m\omega^2 r = c\Delta, \quad (5.65)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости вала.

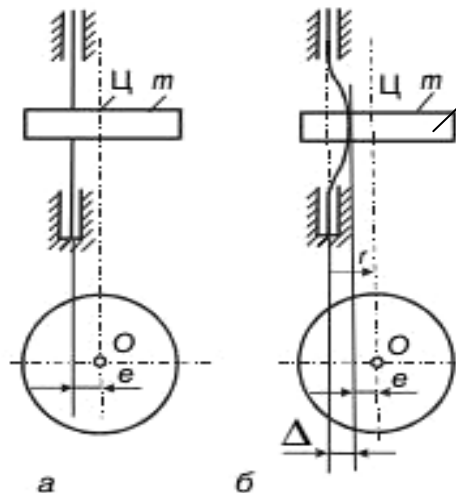


Рис. 5.11

Подставляя в (5.65)  $\Delta = r - e$ , получаем

$$r = \frac{ce}{|c - m\omega^2|} = \frac{e}{|1 - (\omega/\omega_*)^2|}, \quad (5.66)$$

где  $\omega_* = \sqrt{c/m}$ .

Круговое движение точки прикрепления диска  $O$  называют *прецессией*. При  $c = m\omega_*^2$  ( $\omega = \omega_*$ ) имеем  $r \rightarrow \infty$ . Угловую скорость  $\omega_*$  называют *критической скоростью вращения*. Она совпадает с собственной частотой изгибных колебаний не вращающейся системы вал-диск.

При  $\omega \gg \omega_*$  имеем  $r \rightarrow 0$ . Это означает, что при очень податливых валах ( $c < m\omega^2$ ) центр масс стремится занять положение на геометрической оси вращения, что соответствует так называемому *самоцентрированию* вала.

Таким образом, мы располагаем двумя способами уменьшения  $r$ , а именно уменьшением эксцентриситета  $e$ , достигаемым за счет балансировки, и уменьшением жесткости вала, обеспечивающим самоцентрирование. В ряде случаев самоцентрирование является единственным техническим решением. Так, например, попытка решить эту задачу с помощью балансировки для сушильного барабана бытовой стиральной машины привела бы к абсурдному требованию укладывать мокрое белье таким образом, чтобы его центр масс совпадал с осью вращения.

Строго говоря, рассматриваемое движение при стационарном режиме не является колебательным, поскольку любое «волокно» вала остается одинаково деформированным не зависимо от времени. Тем не менее, это ротационное движение тесно связано с колебаниям. Обратимся к графику центробежных и восстанавливающих сил (рис. 5.12). Пусть  $r = r_*$  отвечает при заданной угловой скорости стационарному состоянию системы. Дадим возмущение системы  $\Delta r$ . При этом возникает некоторая «восстанавливающая» сила  $\Delta F$ , стремящаяся вернуть систему к стационарному состоянию. Легко убедиться в том, что

$$\Delta F = c(r_* + \Delta r - e) - m\omega^2(r_* + \Delta r) = (c - m\omega^2)\Delta r$$

(см. формулу (5.65)). Если теперь под эффективной жесткостью  $c_3$  понимать  $\Delta F / \Delta r$ , то  $c_3 = c - m\omega^2$ .

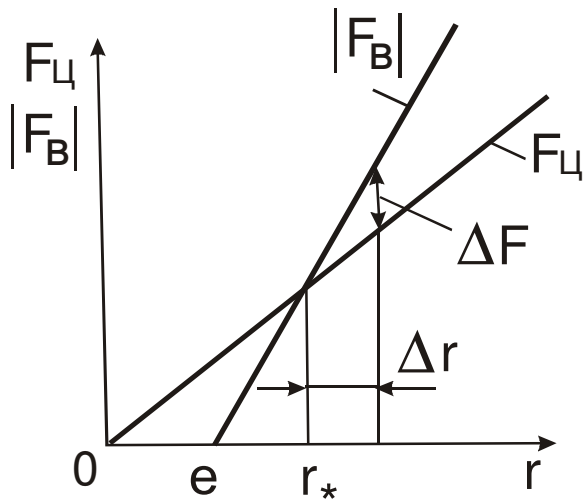


Рис.5.12

венные частоты, несколько отличающиеся от собственной частоты не вращающейся системы  $\omega_*$ . Определенное влияние также оказывают диссипативные силы, которые в данном случае не всегда играют демпфирующую роль.

Частотный диапазон в окрестности значения  $\omega_*$  обычно считается недопустимым для эксплуатации, если  $0,7 \leq \omega / \omega_* \leq 1,4$ .

### 5.13. Использование условий энергетического баланса при анализе колебательных процессов

Как и во многих задачах динамики, использование энергетических соотношений при анализе колебательных процессов дает не только четкую физическую картину явлений, но также возможность прогнозирования и получения эффективных инженерных оценок.

Одним из важных вопросов, представляющим большой практический интерес, является характер изменения амплитуд колебаний. Здесь, как уже отмечалось в п. 1.3, различают три случая: нарастающие колебания, затухающие и стационарные (или установившиеся). При нарастании амплитуды энергия системы возрастает, т.е.  $\Delta E = E(t_2) - E(t_1) > 0$  ( $t_2 > t_1$ ); при затухании – убывает, т.е.  $\Delta E < 0$  и, наконец, при стационарных режимах  $\Delta E = 0$ .

Определим приращение энергии за отрезок времени, равный периоду колебаний ( $t_2 - t_1 = \tau$ ). С этой целью умножим обе части дифференциального уравнения

$$a\ddot{q} + cq = Q$$

на  $\dot{q}dt$ . При этом

Следовательно, при  $c \rightarrow m\omega_*^2$  имеем  $c_3 \rightarrow 0$ ; при этом данное состояние равновесия оказывается неустойчивым. Это означает, что при нарушении стационарного состояния не возникает восстанавливающей силы. При этом если  $\omega < \omega_*$ , собственная частота равна  $k = \sqrt{c_3/m} = \sqrt{\omega_*^2 - \omega^2}$ . При более строгом рассмотрении этой задачи с учетом влияния опущенных выше кориолисовых сил инерции оказывается, что система имеет собствен-

$$a\ddot{q}\dot{q}dt = a\dot{q}\frac{d\dot{q}}{dt}dt = d(0,5a\dot{q}^2) = dT;$$

$$c\dot{q}qdt = cq\frac{dq}{dt}dt = d(0,5cq^2) = dV,$$

после чего уравнение принимает вид  $dT + dV = Q\dot{q}dt$  или

$$dE = Q\dot{q}dt, \quad (5.67)$$

где  $E = T + V$  – полная механическая энергия системы.

Интегрируя (5.67) на одном периоде  $\tau$ , получаем

$$E_2 - E_1 = \Delta E = \int_0^\tau Q\dot{q}dt. \quad (5.68)$$

Этот результат является достаточно очевидным, поскольку  $Q\dot{q}dt = Qdq$ , а следовательно, зависимость (5.68) равносильна утверждению о том, что приращение энергии за период  $\tau$  равно работе неконсервативных обобщенных сил.

Рассмотрим ряд типовых случаев поведения колебательных систем с энергетических позиций.

1. **Свободные колебания без сил сопротивления.** В этом случае  $Q = 0$ , а следовательно, согласно (5.68)  $\Delta E = 0$ . Вывод: колебания стационарны, т.е.  $A = \text{const}$ , где  $A$  – амплитуда колебаний.

2. **Свободные колебания при линейной силе сопротивления.** При этом  $Q = -b\dot{q}$ . Тогда

$$\Delta E = -b \int_0^\tau \dot{q}^2 dt < 0,$$

следовательно, колебания затухают.

В п.2.4 был введен в рассмотрение коэффициент рассеяния  $\psi$ , характеризующий долю рассеянной энергии за счет преодоления сил сопротивления. Тогда

$$\Delta E_- = 0,5\psi cA^2. \quad (5.69)$$

Здесь и ниже индекс «минус» отвечает отведенной энергии, а индекс «плюс» – подводимой; при этом  $\Delta E = \Delta E_+ - \Delta E_-$ . График  $\Delta E_-(A)$  имеет вид параболы (рис. 5.13,а).

3. *Свободные колебания при постоянной силе сопротивления (кулоновом трении)*. В этом случае  $Q = -|P|\text{sign}\dot{q}$ , а работа силы сопротивления за один период равна произведению постоянной силы на путь  $4A$ , где  $A$  – среднее значение амплитуды на данном периоде. Тогда (рис.5.13,б)

$$\Delta E_- = 4|P|A. \quad (5.70)$$

Поскольку  $\Delta E = -\Delta E_- < 0$ , колебания затухают.

4. *Вынужденные колебания при гармонической вынуждающей силе*  $Q = F_0 \cos \omega t$ . В этом случае согласно (5.17)  $q = A \cos(\omega t - \gamma)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta E &= -F_0 A \omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin(\omega t - \gamma) dt = \\ &= -F_0 A \omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t (\sin \omega t \cos \gamma - \cos \omega t \sin \gamma) dt = \pi A F_0 \sin \gamma. \end{aligned} \quad (5.71)$$

При  $\omega < k$  и  $\omega > k$  имеем соответственно  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$ . Таким образом, в дорезонансном и зарезонансном режимах  $\sin \gamma = 0$ , а следовательно,  $\Delta E = 0$ . При этом может сложиться неверное впечатление, что для поддержания вынужденных колебаний внешний источник не нужен. Однако внутри каждого цикла колебаний происходит взаимодействие между источником энергии и колебательной системой; именно этой перекачкой энергии обеспечиваются вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы. При резонансе ( $\omega = k$ )  $\gamma = \pi/2$ . Тогда согласно (5.71)

$$\Delta E = \Delta E_+ = \pi A F_0 > 0, \quad (5.72)$$

а следовательно, амплитуда колебаний возрастает.

График  $\Delta E_+(A)$  представляет собой линейную характеристику (рис.5.13,в).

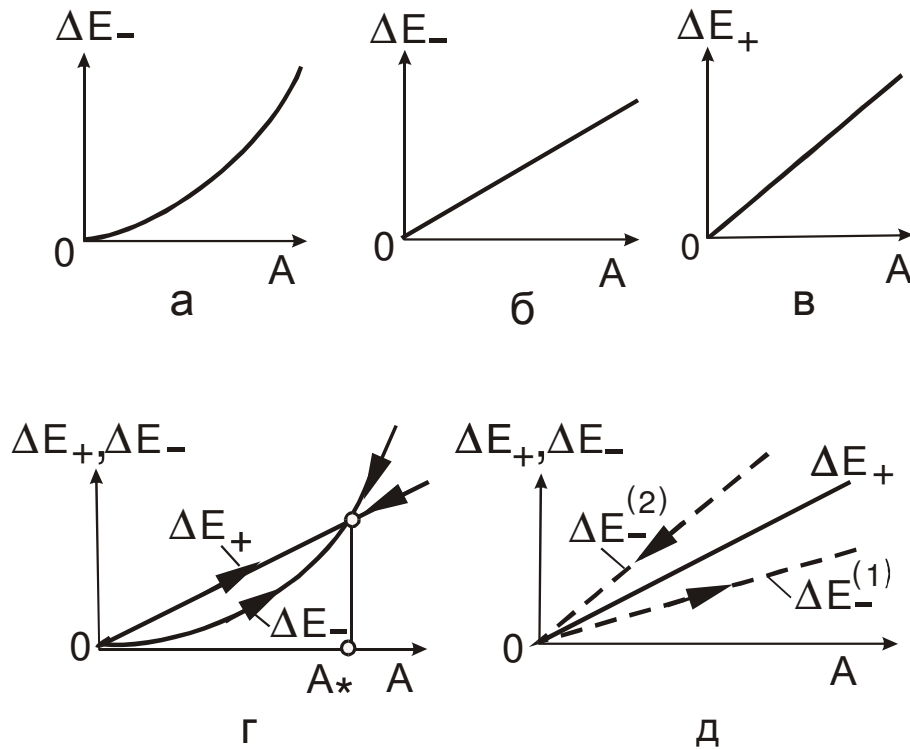


Рис.5.13

### 5. Вынужденные колебания при гармонической вынуждающей силе и линейной силе сопротивления

$$\Delta E = \Delta E_+ - \Delta E_- = \pi A F_0 \sin \gamma - 0,5 \psi c A^2.$$

На рис. 5.13,г совмещены графики, приведенные на рис. 5.13,а,в. При  $A < A_*$  имеем  $\Delta E > 0$ , следовательно,  $A$  растет, а при  $A > A_*$  – убывает, так как  $\Delta E < 0$ . В обоих случаях  $A \rightarrow A_*$ , что отвечает стационарному режиму вынужденных колебаний, когда  $\Delta E_+ = \Delta E_-$  и  $\Delta E = 0$ . Легко убедиться в том, что этот режим является устойчивым. Об этом свидетельствует стремление к  $A_*$  при любом малом отклонении от этого значения амплитуды.

Воспользуемся условиями энергетического баланса для оценки резонансных амплитуд системы с конечным числом степеней свободы. Сначала рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Примем в качестве обобщенных координат деформации упругих элементов, а обобщенные силы – в форме  $Q_i = F_i \cos \omega t$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда согласно (5.72) и (5.69) при резонансе

$$\Delta E_+ = \pi(A_1 F_1 + A_2 F_2); \quad \Delta E_- = 0,5(\psi_1 c_1 A_1^2 + \psi_2 c_2 A_2^2),$$

где  $c_1, c_2$  – коэффициенты жесткости;  $A_1, A_2$  – резонансные амплитуды.

Приравнивая  $\Delta E_+ = \Delta E_-$  и принимая во внимание, что при резонансе отношение амплитуд согласно (5.33) равно соответствующему коэффициенту формы  $\beta_r = (A_2 / A_1)$  при  $\omega = k_r$ , получаем

$$A_1 = \frac{2\pi(F_1 + \beta_r F_2)}{\psi_1 c_1 + \psi_2 c_2 \beta_r^2}; \quad A_2 = A_1 \beta_r. \quad (5.73)$$

В общем случае для систем с  $N$  степенями свободы аналогичным образом определяем

$$A_{jr} = \frac{2\pi \sum_{i=1}^N \beta_{ir} F_i}{\sum_{i=1}^N \psi_i c_i \beta_{ir}^2}; \quad A_{ir} = A_{jr} \beta_{ir}. \quad (5.74)$$

Здесь  $\beta_{ir} = (A_{ir} / A_{jr})$  при  $\omega = k_r$ ; это означает, что коэффициент формы при  $i = j$  принят за единицу. (При получении формулы (5.73) мы приняли  $\beta_{1r} = 1$ ;  $\beta_{2r} = \beta_r$ ).

**6. Вынужденные колебания при гармонической вынуждающей силе и постоянной силе сопротивления.** Как было установлено выше, для резонансного случая  $\Delta E_+ = \pi A F_0$ ;  $\Delta E_- = 4|P|A$ . Если  $\Delta E_+ > \Delta E_-$  ( $\Delta E > 0$ ), что отвечает  $F_0 > 4|P|/\pi$ , амплитуда  $A$  неограниченно растет, а при  $F_0 < 4|P|/\pi$  – убывает. Этим случаям на графиках (рис. 5.13,д) соответствуют прямые  $\Delta E_+^{(1)}$  и  $\Delta E_-^{(2)}$ .

Если наряду с постоянной силой сопротивления действует и сила линейного сопротивления, то при условии  $F_0 > 4|P|/\pi$  возможен стационарный резонансный режим при  $\Delta E = 0$ . Тогда

$$\pi A F_0 = 4|P|A + 0,5\psi c A^2. \quad (5.75)$$

При этом резонансная амплитуда  $A_*$ , определяемая из уравнения (5.75), равна

$$A_* = 2(\pi F_0 - 4|P|)/(\psi c). \quad (5.76)$$

#### 5.14. Отображение колебательных процессов на фазовой плоскости

**Фазовой плоскостью** называют декартову систему координат, у которой по оси абсцисс отложена обобщенная координата, а по оси ординат – обобщенная скорость или пропорциональная ей величина (рис. 5.14). Точку на фазовой

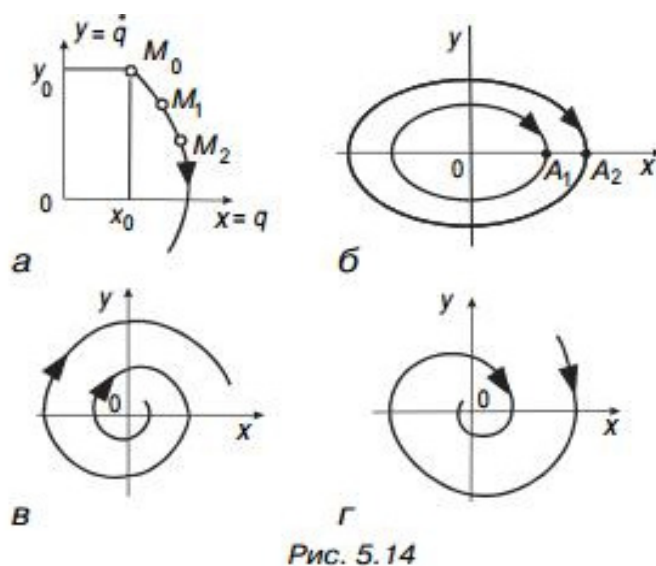


Рис. 5.14

плоскости называют **изображающей точкой**, а геометрическое место изображающих точек, отвечающих последовательным моментам времени – **фазовой траекторией**. Поскольку при  $y > 0$  координата  $x$  растет, а при  $y < 0$  – убывает, изображающая точка при колебательном процессе перемещается по фазовой траектории по часовой стрелке.

Изображение колебательных процессов на фазовой плоскости обладает большой наглядностью, причем особенно в тех случаях, когда при  $t \rightarrow \infty$  колебания асимптотически приближаются к определенному установившемуся режиму.

При гармонических колебаниях  $q = A \sin \varphi$ ,  $\dot{q} = A \omega \cos \varphi$ , где  $\varphi = \omega t + \alpha$ , что в координатах  $x = q$ ,  $y = \dot{q}$  отвечает уравнению эллипса, заданному в параметрической форме (рис.5.14,б). Очевидно, что любой установившийся колебательный процесс на фазовой плоскости отображается замкнутой фазовой траекторией. При нарастании амплитуды фазовая траектория имеет вид раскручивающейся спирали (рис. 5.14,в), а при затухающих колебаниях – скручивающейся спирали (рис. 5.14,г).

Совокупность фазовых траекторий, свойственных данной колебательной системе, называют **фазовым портретом** или **фазовой картиной**. Так, например, фазовым портретом свободных колебаний без учета сил сопротивления является семейство эллипсов, параметры которых определяются начальными условиями. Один из методов построения фазовых траекторий приведен в п.8.2.

## ГЛАВА 6. ВИБРОЗАЩИТА

### 6.1. Общие сведения о способах виброзащиты

Различают четыре основных способа виброзащиты, которые схематически отображены на рис.6.1.

1. *Уменьшение вынуждающих сил* или снижение внешней виброактивности (рис.6.1,а). Обозначение **ИК** отвечает источнику колебаний, **ОВ** – объекту виброзащиты; здесь и ниже стрелка указывает на элемент, с помощью которого при данном способе обеспечивается виброзащита.

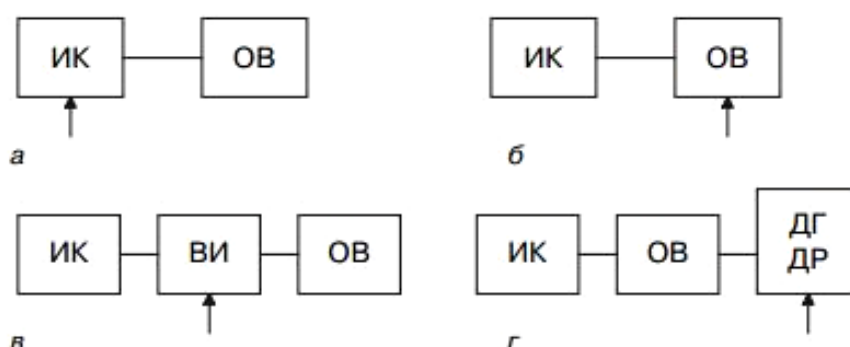


Рис. 6.1

В этом случае с целью защиты объекта каким-либо образом воздействуют на источник колебаний. Так, например, с помощью балансировки удастся существенно снизить переменные вынуждающие силы, вызывающие вынужденные колебания машин. Для уменьшения виброактивности и динамических ошибок кулачковых механизмов большое значение имеет рациональный выбор законов программного движения, играющих роль источника кинематических возмущений (см. п.6.2).

2. *Рациональное изменение параметров системы* или снижение внутренней виброактивности (рис.6.1,б). Этот способ обычно предполагает соответствующий выбор инерционных и упругих характеристик объекта виброзащиты (см. п.6.3).

3. *Виброизоляция* (рис.6.1,в). При этом между источником колебаний (**ИК**) и объектом виброзащиты (**ОВ**) устанавливается виброизолятор (**ВИ**), обладающий требуемыми упругими или упругодиссипативными характеристиками (см. п.6.4).

4. *Динамическое гашение и динамическая разгрузка* (рис.6.1,г). При данном способе виброзащиты в случае гармонического силового воздействия на объект виброзащиты (**ОВ**) к нему присоединяется либо динамический гаситель (**ДГ**), либо динамический разгрузчик (**ДР**) – при кинематическом возмущении (см. п.6.5, 6.6).

## 6.2. Учет колебаний при выборе закона движения толкателя кулачкового механизма

**Источники возбуждения сопровождающих колебаний.** Специфическая особенность кулачковых механизмов, равно как и других механизмов циклового действия, заключается в том, что выходное звено должно колебаться в соответствии с заданным законом программного движения, а любые дополнительные колебания являются нежелательными динамическими ошибками. Таким образом, подобные механизмы являются одновременно источником колебаний и объектом виброзащиты.

Для облегчения дальнейшего изложения, не сужая общности, рассмотрим модель кулачкового механизма с поступательным толкателем, причем ограничимся учетом кинематического возмущения (см. рис.5.4,б). Согласно (5.26) дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = -\ddot{x}(t) \quad (6.1)$$

где  $\ddot{x} = w_*$  – заданный закон изменения ускорений в программном движении;  $q$  – деформация упругого толкателя (колебания);  $n, k^2$  – см. п.4.2.

Общее решение уравнения (6.1) имеет вид (5.7). На первый взгляд кажется, что при установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ) свободные и сопровождающие колебания затухают, а следовательно, можно ограничиться учетом лишь вынужденных колебаний, описываемых частным решением  $Y(t)$ . Однако, как будет показано ниже, такое утверждение справедливо лишь при условии, что функция  $x = \Pi(\varphi)$  и ее производные не терпят разрывов непрерывности. В противном случае колебания с собственной частотой  $k$  возбуждаются не только при  $t = 0$ , но и в моменты времени, соответствующие этим разрывам. Итак, пусть в момент времени  $t = t_1$  геометрическая передаточная функция или ее производные имеют разрыв непрерывности. Воспользуемся формулой (5.7), которую теперь перепишем в следующем виде:

$$q = q^0 + \exp[-n(t - t_1)][A_1 \cos k(t - t_1) + B_1 \sin k(t - t_1)] + Y(t). \quad (6.2)$$

Здесь функция  $q^0$  объединяет все колебания, возбужденные ранее, т.е. при  $t < t_1$ , а вторая группа слагаемых отвечает колебаниям, возбужденным непосредственно при  $t = t_1$ .

Принимая во внимание, что перемещение  $y = x + q$  и скорость толкателя  $\dot{y} = \dot{x} + \dot{q}$  в абсолютном движении – непрерывные функции, можно утверждать, что  $y(t_1 + 0) = y(t_1 - 0)$  и  $\dot{y}(t_1 + 0) = \dot{y}(t_1 - 0)$ . Здесь  $t_1 + 0$  и  $t_1 - 0$  отвечает беско-

нечно малому смещению вдоль оси времени в окрестности  $t = t_1$ . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} x(t_1 + 0) + q(t_1 + 0) &= x(t_1 - 0) + q(t_1 - 0); \\ \dot{x}(t_1 + 0) + \dot{q}(t_1 + 0) &= \dot{x}(t_1 - 0) + \dot{q}(t_1 - 0). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

После подстановки (6.3) в (6.2) получаем

$$A_1 = -(\Delta x_1 + \Delta Y_1); \quad B_1 = -(\Delta \dot{x}_1 + \Delta \dot{Y}_1)/k, \quad (6.4)$$

где  $\Delta x_1 = x(t_1 + 0) - x(t_1 - 0)$ ;  $\Delta \dot{x}_1 = \dot{x}(t_1 + 0) - \dot{x}(t_1 - 0)$ ;  $\Delta Y_1 = Y(t_1 + 0) - Y(t_1 - 0)$ ;  $\Delta \dot{Y}_1 = \dot{Y}(t_1 + 0) - \dot{Y}(t_1 - 0)$ , т.е. перепады соответствующих функций при  $t = t_1$  (Здесь учтено, что  $q^0(t_1 + 0) = q^0(t_1 - 0)$  и  $\dot{q}^0(t_1 + 0) = \dot{q}^0(t_1 - 0)$ ).

Введем в рассмотрение параметры  $D_1$  и  $\alpha_1$ , определяемые зависимостями  $A_1 = D_1 \sin \alpha_1$ ;  $B_1 = D_1 \cos \alpha_1$ . Тогда согласно (6.2) сопровождающие колебания  $q_1$ , возбужденные в момент времени  $t = t_1$ , описываются следующим образом:

$$q_1 = D_1 \exp[-n(t - t_1)] \sin[k(t - t_1) + \alpha_1], \quad (6.5)$$

где  $D_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ ;  $\sin \alpha_1 = A_1 / D_1$ ;  $\cos \alpha_1 = B_1 / D_1$ .

В дальнейшем для краткости амплитуду  $D_1$  будем называть *скачком*. Максимальное значение дополнительных ускорений, вызванных скачком  $D_1$ , равно

$$|\Delta \ddot{q}_1|_{\max} = k^2 D_1. \quad (6.6)$$

На основании (6.4) и (6.6) имеем

$$|\Delta \ddot{q}_1|_{\max} \approx k^2 \sqrt{(\Delta x_1 + \Delta Y_1)^2 + (\Delta \dot{x}_1 + \Delta \dot{Y}_1)^2 / k^2}. \quad (6.7)$$

Влияние разрывов непрерывности геометрических характеристик на значения  $D$ ,  $\alpha$ ,  $|\Delta \ddot{q}_1|_{\max}$  показано в табл.6.1. (Здесь и ниже индекс  $i$  опущен). Каждая строка таблицы соответствует нарушению непрерывности лишь одной характеристики; при этом остальные функции предполагаются непрерывными.

Таблица 6.1

**Расчетные зависимости для учета разрывов непрерывности  
геометрических характеристик механизма**

Тип скачка	$D$	$ \Delta \dot{q} _{\max}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$\Delta \Pi \neq 0$	$ \Delta \Pi $	$k^2  \Delta \Pi $	$3\pi/2$	$\pi/2$
$\Delta \Pi' \neq 0$	$\omega_0  \Delta \Pi' /k$	$k\omega_0  \Delta \Pi' $	$\pi$	0
$\Delta \Pi'' \neq 0$	$\omega_0^2  \Delta \Pi'' /k^2$	$\omega_0^2  \Delta \Pi'' $	$\pi/2$	$3\pi/2$
$\Delta \Pi''' \neq 0$	$\omega_0^3  \Delta \Pi''' /k^3$	$\omega_0^3  \Delta \Pi''' /k$	0	$\pi$

Примечание: если рассматриваемое значение  $\Delta \Pi, \Delta \Pi', \Delta \Pi''$  или  $\Delta \Pi'''$  положительно, то  $\alpha = \alpha_1$ ; в противном случае  $\alpha = \alpha_2$ .

Ниже приведены некоторые пояснения к рассмотренным в табл.6.1 типовым случаям (подробнее см. [2],[3],[7]).

**Разрыв непрерывности функции положения  $\Delta \Pi$ .** Этот случай в чистом виде не может быть реализован, однако к нему близок случай ступенчатого изменения профиля кулачка, возникающий из-за погрешностей при изготовлении. Поскольку максимальное дополнительное ускорение пропорционально квадрату собственной частоты, даже малый скачок  $\Delta \Pi$  может вызвать существенные искажения заданного закона изменения ускорения  $\ddot{x} = \Pi''(\varphi_1)\omega_0^2$ . Наблюдаемый при этом эффект напоминает езду по булыжной мостовой.

**Разрыв первой геометрической передаточной функции  $\Delta \Pi'$**  (жесткий удар). Динамический эффект от жесткого удара возрастает с ростом угловой скорости входного звена  $\omega_0$  и значения собственной частоты. Жесткие удары возникают не только, когда скачком меняется функция  $\Pi'$ , но и при ударах, сопутствующих выборке зазоров, подключению кинематических цепей с помощью муфт, при фиксации некоторых промежуточных положений выходного звена и в ряде других случаев.

**Разрыв непрерывности второй геометрической передаточной функции  $\Delta \Pi''$**  ("мягкий" удар) (рис.6.2,а). В этом случае максимум дополнительных ускорений, вызванных скачком  $\Delta \Pi''$ , приблизительно равен этому скачку, что приводит к существенному искажению заданных программных характеристик. В качестве примера на рис.6.3 приведены ускорения  $\ddot{x}(t)$ , изменяющиеся в программном движении по косинусоидальному закону (кривая 1) и  $\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{q}(t)$  с учетом возбужденных колебаний (кривая 2).

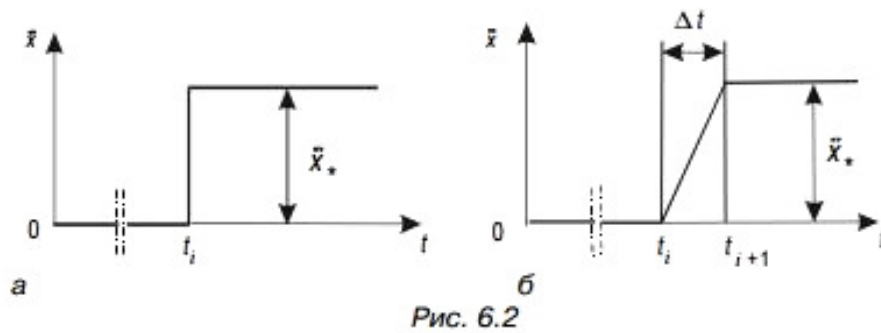


Рис. 6.2



Рис. 6.3

**Разрыв непрерывности третьей геометрической передаточной функции  $\Delta\Pi'''$ .** В этом случае имеет место скачок производной функции  $\ddot{x}(t) = \omega_0^3\Pi'''$ , называемый ускорением второго порядка или рывком. Поскольку максимальные дополнительные ускорения в отличие от случая «жесткого» удара обратно пропорциональны собственной частоте  $k$ , повышение жесткости приводит к положительному эффекту.

**Резкое изменение функции  $\Pi''$  (эквивалентный скачок).** Рассмотрим эту задачу на примере резкого изменения ускорений программного движения  $\ddot{x} = \Pi''\omega_0^2$  по линейному закону (рис.6.2,б). Покажем, что при достаточно малом значении  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  система будет реагировать на изменение  $\dot{x}$  почти так же, как и на скачкообразное изменение этой функции. Сначала определим с помощью зависимости (6.5) сопровождающие колебания  $q_*$ , вызванные на участке  $t > t_{i+1}$  двумя скачками  $\Delta\Pi'''$  – при  $t = t_i$  и при  $t = t_{i+1}$ :

$$q_* = \Delta q_i + \Delta q_{i+1} = D_i \exp[-n(t - t_i)] \sin[k(t - t_i) + \alpha_i] + D_{i+1} \exp[-n(t - t_{i+1})] \sin[k(t - t_{i+1}) + \alpha_{i+1}].$$

Согласно формулам табл.6.1

$$D_i = D_{i+1} = |\Delta\ddot{x}|/k^3 = \ddot{x}_*/(k^3\Delta t); \alpha_i = 0; \alpha_{i+1} = \pi.$$

Отсюда, принимая  $t_i = 0$ , имеем

$$q_* = \ddot{x}_*(k^3 \Delta t)^{-1} \exp[-n(t - \Delta t)] [\exp(-n\Delta t) \sin kt - \sin k(t - \Delta t)].$$

Ввиду малости  $n\Delta t$  в целях упрощения примем  $\exp(-n\Delta t) = 1$ . Тогда

$$q_* = \ddot{x}_*(k^3 \Delta t)^{-1} \exp[-n(t - \Delta t)] [\sin kt(1 - \cos k\Delta t) + \cos kt \sin k\Delta t].$$

Опуская элементарные преобразования, получаем

$$q_* = D_* \exp[-n(t - \Delta t)] \sin(kt + \alpha).$$

Здесь  $D_*$  - эквивалентный скачок, определяемый следующим образом:

$$D_* = \ddot{x}_* k^{-2} \mathfrak{a}^0(\nu), \quad (6.8)$$

где  $\mathfrak{a}^0(\nu) = |\sin \pi \nu| / (\pi \nu)$ ;  $\nu = \Delta t / T$ ;  $T = 2\pi / k$ .

Отсюда при  $t > t_{i+1}$

$$|\ddot{q}_*|_{\max} \approx k^2 D_* = \ddot{x}_* \mathfrak{a}^0(\nu). \quad (6.9)$$

При  $\nu = 0$  имеем  $\mathfrak{a}^0 = 1$ , что соответствует мягкому удару. При  $\nu > 0$  соответственно  $\mathfrak{a}^0(\nu) < 1$ , поэтому этот параметр является показателем смягчения динамического эффекта по сравнению с мягким ударом.

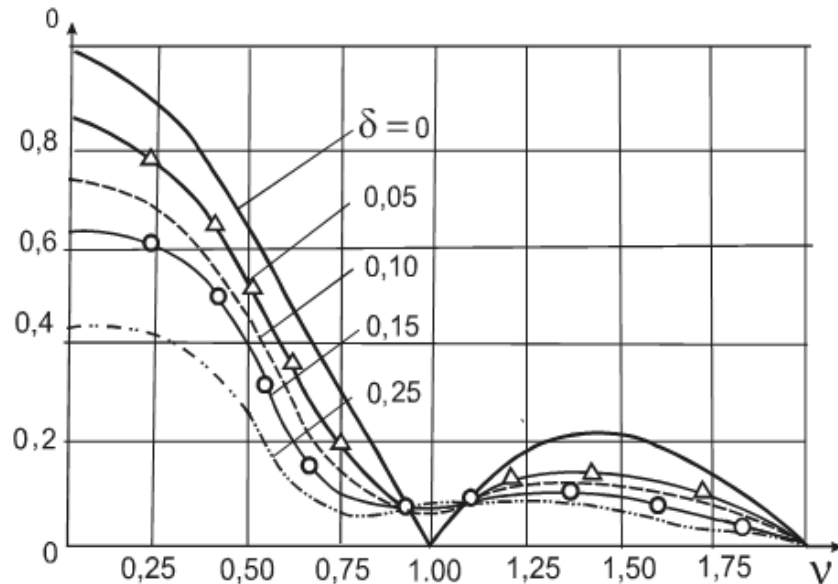


Рис.6.4

Рассмотренному случаю на графике  $\mathfrak{a}^0(\nu)$  (рис.6.4) отвечает кривая  $\delta = 0$ , что соответствует принятому выше допущению  $\exp(-n\Delta t) \approx 1$ . Это озна-

чает, что в пределах отрезка времени  $\Delta t$  мы пренебрегли затуханием колебаний из-за линейной силы сопротивления. При  $\delta = \lambda/(2\pi) \neq 0$  ( $\lambda$  - логарифмический декремент) кривые  $\alpha^0(\nu)$  располагаются ниже за исключением малых зон в окрестности целых значений  $\nu$ . Это свидетельствует о том, что силы сопротивления в целом смягчают динамический эффект от резкого изменения идеальных ускорений  $\ddot{x}$ .

Из графиков  $\alpha^0(\nu)$  также следует, что при малых значениях  $\nu$  ( $\nu \leq 0,25$ ) **динамический эффект от безразрывного изменения передаточной функции практически эквивалентен эффекту от скачка**. Это иллюстрируется на рис.6.5 несколькими графиками  $\ddot{y}(t)$  при мягком ударе, т.е. при  $\nu=0$  (рис.6.5,а), и при резком изменении  $\ddot{x}(t)$  ( $\nu=0,25$ ) для трех случаев:  $\ddot{x}(t)$  изменяется по линейному закону (рис.6.5,б), по закону  $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_{\max} \sin 0,5\pi t / \Delta t$  (рис.6.5,в) и по закону  $\ddot{x} = \ddot{x}_{\max} 0,5(1 - \cos \pi t / \Delta t)$  (рис.6.5,г).

В этом эффекте еще раз проявляется невозможность сведения динамической задачи к геометрической. Другими словами, нельзя предложить закон движения, который был бы оптимальным во всех случаях не зависимо от частотных характеристик механизма.

При больших значениях  $\nu$  коэффициент  $\alpha^0(\nu)$  резко убывает; при этом  $\alpha^0 \leq 1/(\pi\nu)$ . На графике  $\alpha^0(\nu)$  представляют интерес точки  $\nu = j\pi$  ( $j=1,2,\dots$ ), в которых  $\alpha^0 \approx 0$ . Эти режимы, отвечающие так называемому **квазистатическому нагружению**, возникают из-за взаимной компенсации колебаний, вызванных обоими скачками  $\Delta \Pi'''$ . Наличие силы сопротивления при этом, однако, приводит лишь к их частичной компенсации (подробнее см. [5]).

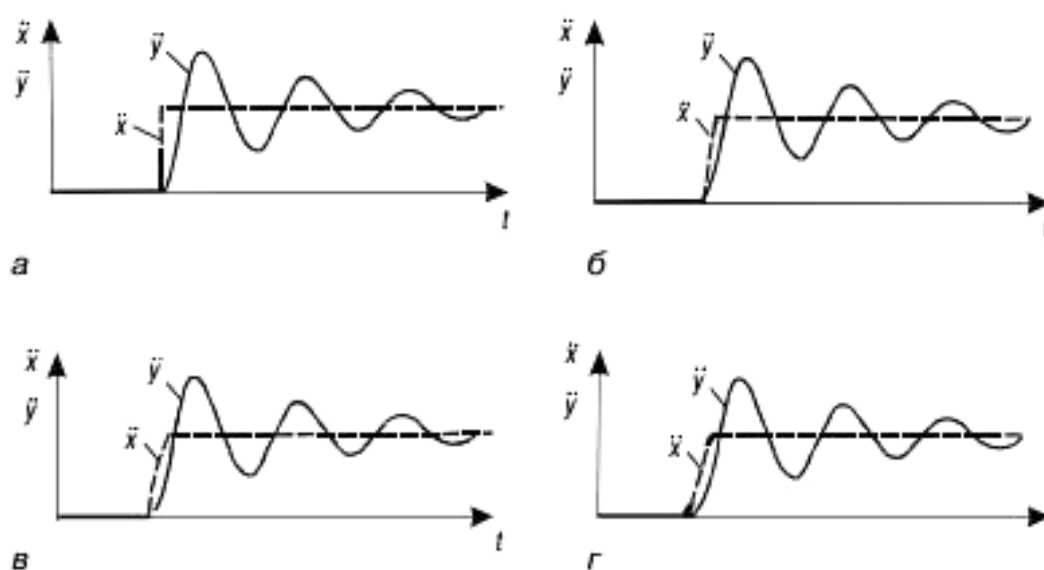


Рис. 6.5

**Ограничение накопления возмущений.** Ввиду периодичности кинематических характеристик с периодом  $\tau = 2\pi/\omega_0$ , где  $\omega_0$  – угловая скорость входного звена (кулачка), сумма колебаний, возбужденных от одинаковых скачков, также должна быть периодической функцией. Поэтому для оценки результирующего режима можно снова воспользоваться замкнутой формой решения, основанной на условиях периодичности (см. п.5.9). При этом согласно формулам (5.52) и (5.53) учет скачков на предыдущих циклах приводит к тому, что скачок  $D_1$  на рассматриваемом цикле трансформируется в  $\mu D_1$ , где  $\mu$  – коэффициент накопления возмущений, а максимальные дополнительные ускорения, вызванные этим скачком, определяются как

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta \ddot{q}_1|_{\max} = k^2 \mu D_1. \quad (6.10)$$

Семейство кривых  $\mu(N, \lambda)$ , где  $N = k/\omega_0$ ,  $\lambda$  – логарифмический декремент, приведено на рис.6.6. Коэффициент  $\mu$  может быть как больше единицы (усиление колебаний), так и меньше (ослабление колебаний). Значение  $\mu^+$  лежит в окрестности целых  $N$ , а  $\mu^-$  имеет место, когда  $2N$  – нечетное число. Из формулы (5.53) следует

$$\mu^+ = [1 - \exp(-\lambda N)]^{-1}; \quad \mu^- = [1 + \exp(-\lambda N)]^{-1}. \quad (6.11)$$

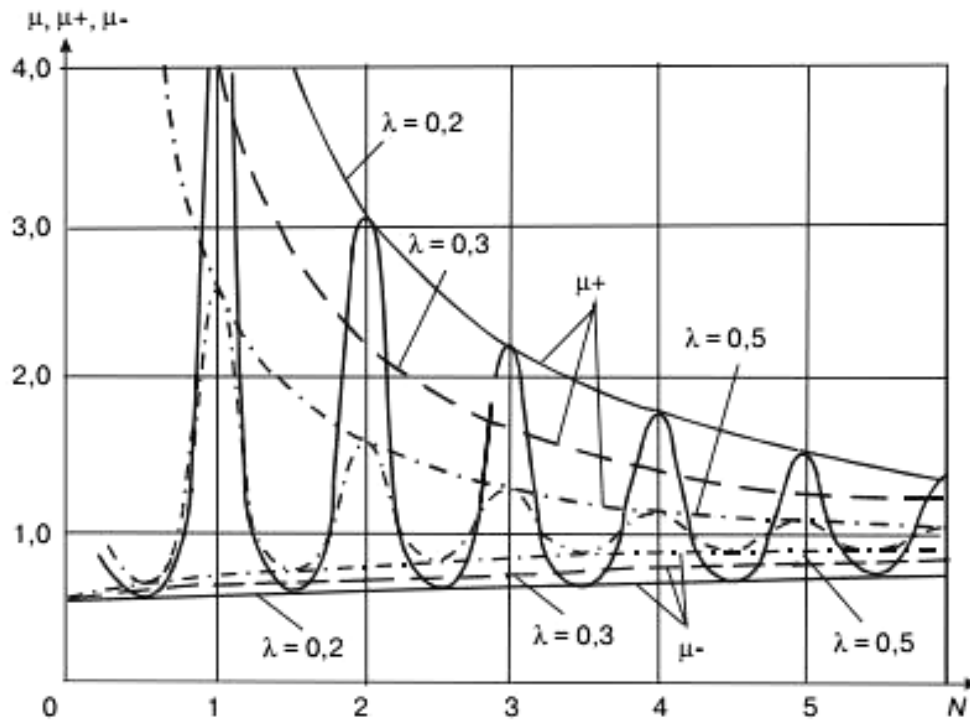


Рис. 6.6

Значению  $\mu^+$  отвечает совпадение фазы ранее возбужденных колебаний и колебаний в рассматриваемом цикле; при  $\mu = \mu^-$  эти колебания находятся в противофазе.

При динамическом синтезе для ограничения уровня сопровождающих колебаний целесообразно ввести ограничение  $\mu < [\mu]$ , где  $[\mu]$  – допускаемое значение коэффициента накопления возмущений. Тогда на основании (5.53)

$$1 - 2\exp(-\lambda N)\cos 2\pi N + \exp(-2\lambda N) < [\mu]^{-2}. \quad (6.12)$$

Это неравенство следует решить относительно частотного критерия  $N$ . Для получения более наглядных результатов примем  $[\mu] = 1$ . Тогда

$$0,5\exp(-\lambda N) < \cos 2\pi N. \quad (6.13)$$

При  $\lambda N \rightarrow 0$  неравенство (6.13) удовлетворяется при  $N < E - 1/6$ , либо при  $N > E + 1/6$ , где  $E$  – целое число. В другом предельном случае, когда  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $N < E - 1/4$ , либо  $N > E + 1/4$ .

Полученная частотная настройка практически оказывается эффективной лишь при малых значениях  $N$  (примерно  $N < 4 \div 6$ ). Поясним это на простом примере. Пусть  $k = 170 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_0 = 20 \text{ с}^{-1}$ . При этом  $N = k / \omega_0 = 8,5$ . Это значение соответствует  $\mu^- < 1$ . Однако достаточно частоту вращения уменьшить примерно на  $1,1 \text{ с}^{-1}$  (что в реальных условиях вполне возможно), как  $N = 9$ ; при целых значениях  $N$  имеем  $\mu = \mu^+ > 1$ , следовательно, уровень колебаний повысился. Таким образом, в этом случае частотный критерий оказался недостаточно надежным. В подобных ситуациях более целесообразно потребовать  $\mu^+ < [\mu]$ , принимая  $[\mu] = 1 + [\Delta\mu]$ , где  $[\Delta\mu]$  – малая положительная добавка (например,  $[\Delta\mu] < 0,05 \div 0,1$ ). Тогда на основании (6.11)

$$N > \lambda^{-1} \ln\{(1 + [\Delta\mu]) / [\Delta\mu]\}. \quad (6.14)$$

При  $\lambda N > 3$  имеем  $0,96 < \mu < 1,04$ ; это означает, что возбуждаемые сопровождающие колебания практически оказываются задемпфированными за время одного оборота входного звена.

Заметим, что учет ограничения  $\mu < [\mu]$  является весьма желательным даже при устранении явных причин возбуждения сопровождающих колебаний, поскольку из-за случайных факторов всегда имеют место периодические возмущения, не учтенные в инженерном расчете, которые при больших значениях  $\mu$  могут существенно увеличить интенсивность колебаний.

**Инженерные рекомендации при синтезе законов движения кулачковых механизмов с учетом возбуждаемых колебаний.** На основании приведенного выше анализа могут быть сформулированы следующие условия, исключающие возможность существенного искажения заданных программных кинематических характеристик.

1. В функции положения  $\Pi(\varphi)$ , а также в первой и второй передаточных функциях  $\Pi'(\varphi) = d\Pi/d\varphi$  и  $\Pi''(\varphi) = d^2\Pi/d\varphi^2$  должны быть устранены разрывы непрерывности.

2. Так как при малых значениях  $\nu = \Delta t/T$  ( $\nu < 0,25$ ) плавное изменение ускорений практически эквивалентно мягкому удару, следует принять (с запасом)  $\Delta t > (2 \div 3)T$ , где  $T = 2\pi/k$  – период свободных колебаний.

3. В целях ограничения динамического эффекта от колебаний, возбужденных на предыдущих циклах движения, следует ограничить максимальное значение коэффициента накопления возмущений  $\mu^+$ . В частности при  $[\mu] < 1,1$  необходимо потребовать, чтобы  $N = k/\omega_0 > 2,4\lambda^{-1}$ . Если, например,  $\lambda = 0,2$ , то собственная частота  $k$  должна по меньшей мере в 12 раз превышать угловую скорость кулачка  $\omega_0$ .

### 6.3. Рациональный выбор параметров системы при гармоническом возбуждении

Ограничимся рассмотрением влияния коэффициента жесткости  $c$  и инерционного коэффициента  $a$  на примере системы с одной степенью свободы. При этом частоту вынуждающей силы  $\omega$  будем считать заданной.

Сначала обратимся к *зарезонансному режиму*  $\omega > k$  ( $z > 1$ ). При уменьшении коэффициента жесткости ( $c \downarrow$ ) уменьшается собственная частота ( $k = \sqrt{c/a} \downarrow$ ), растет коэффициент частотной расстройки ( $z = \omega/k \uparrow$ ), и уменьшается коэффициент динамичности  $\varkappa \downarrow$  (см. рис.5.2). Может, однако, возникнуть вопрос, снижается ли при этом амплитуда вынужденных колебаний, так как  $A = A_{ст} \varkappa$ , а статическая амплитуда  $A_{ст} = F_0/c$  растет с уменьшением  $c$ . Тем не менее амплитуда  $A$  убывает, что наглядно видно из следующей формулы:  $A = F_0/(a\omega^2 - c)$ , справедливой для зарезонансной зоны.

Этот путь снижения амплитуд вынужденных колебаний характерен для виброзащиты приборов, легких и средних машин.

К уменьшению  $\varkappa$  при  $z > 1$  приводит также увеличение инерционного коэффициента  $a$ , ( $a \uparrow, k \downarrow, z \uparrow, \varkappa \downarrow$ ), что характерно для виброзащиты средних и тяжелых машин.

В *дорезонансном режиме* мы располагаем двумя возможностями:  $c \uparrow$ ,  $k \uparrow$ ,  $z \downarrow$ ,  $\varkappa \downarrow$  либо  $a \downarrow$ ,  $k \uparrow$ ,  $z \downarrow$ ,  $\varkappa \downarrow$ . Подобным образом следует изменять параметры для снижения уровня колебаний исполнительных органов технологических машин, жесткость которых должна обеспечивать требуемую точность выполнения технологических или транспортных операций.

#### 6.4. Виброизоляция

При работе любой машины из-за воздействия внешних сил и неуравновешенности инерционных нагрузок возникают периодические силы, передающиеся на несущие конструкции и фундамент машины. Если машину жестко закрепить на фундаменте, то на него полностью будут передаваться нагрузки, возникающие в машине. Однако если машину поставить на упругие элементы, то при соответствующем подборе параметров переменная составляющая реакции на фундамент может быть существенно снижена; при этом осуществляется так называемая виброизоляция машины.

Рассмотрим простейшую динамическую модель машины на упругой подвеске, показанную на рис.6.7,а. Вначале примем, что центр масс машины занимает неизменное положение, и на нее действует гармоническая вынуждающая сила  $F = F_0 \cos \omega t$ , направленная вдоль вертикальной оси  $y$ . Как было показано в п.5.3, вынужденные колебания при этом описываются следующей зависимостью:

$$y = A \cos(\omega t - \gamma), \quad (6.15)$$

причем амплитуда колебаний  $A$  без учета сил сопротивления определяется как

$$A = \frac{F_0}{c} \frac{1}{|1 - z^2|}, \quad (6.16)$$

где  $z = \omega/k$  – коэффициент частотной расстройки;  $k = \sqrt{c/m}$  – собственная частота.

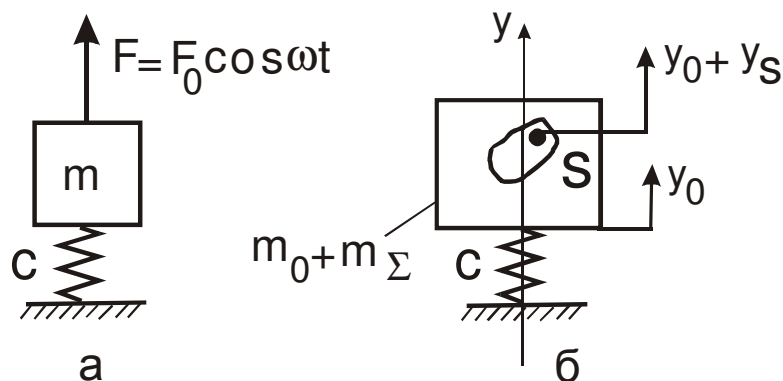


Рис.6.7

Введем в рассмотрение коэффициент виброизоляции  $\xi = R_{\max} / F_0$ , где  $R_{\max}$  – максимальное значение реакции, возникающей за счет силы  $F(t)$  и воздействующей на фундамент (основание). Поскольку  $R_{\max} = cA$ , имеем

$$\xi = \frac{cA}{F_0} = \frac{1}{|1 - z^2|} = \alpha \quad (6.17)$$

Таким образом, без учета силы сопротивления коэффициент виброизоляции равен коэффициенту динамичности  $\alpha$  (см. п.5.4).

Если потребовать  $\xi < \xi_*$ , где  $\xi_* < 1$  – допустимое значение виброизоляции, то из (6.17) следует, что это требование может быть удовлетворено в резонансном режиме при  $z > \sqrt{2}$ . В этом частотном диапазоне силы сопротивления при отсутствии специальных демпфирующих устройств сказываются слабо, поэтому в первом приближении в данном случае их можно не учитывать. Физическая сущность выявленного эффекта связана с тем обстоятельством, что в резонансном режиме сила инерции, возникающая при вынужденных колебаниях, находится в противофазе с вынуждающей силой и поэтому частично ее уравнивает.

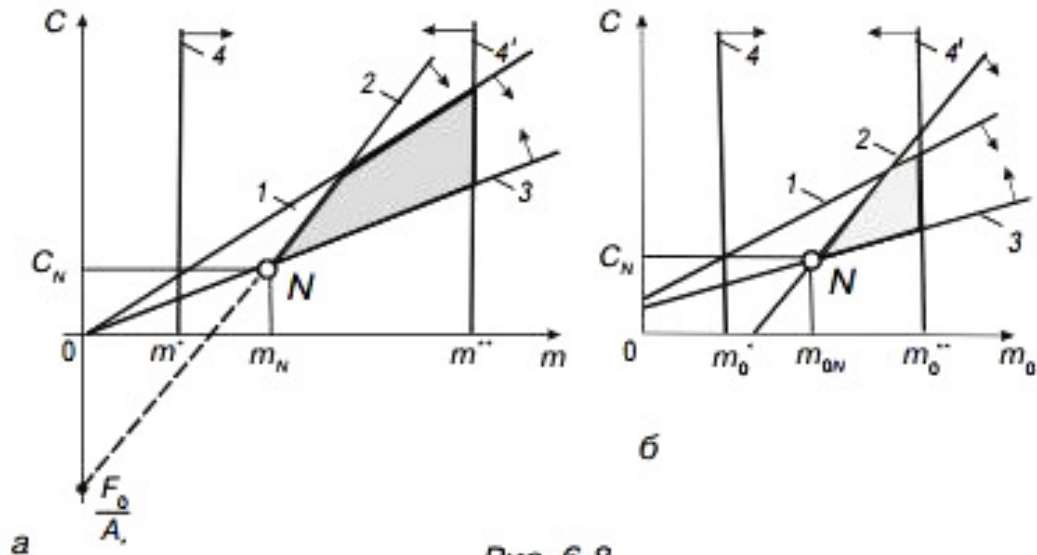


Рис. 6.8

Отобразим поставленное условие на координатной плоскости коэффициент жесткости  $c$  – масса  $m$  (рис.6.8,а). На основании (6.17) имеем

$$c < \frac{m\omega^2}{1 + \xi_*^{-1}}. \quad (6.18)$$

Следовательно, решению задачи отвечает область параметров, лежащая ниже прямой 1.

Вторым требованием может служить ограничение амплитуды колебаний  $A < A_*$ . Тогда согласно (6.16)

$$c < m\omega^2 - F_0 / A_*. \quad (6.19)$$

Соответствующая область лежит ниже прямой 2.

Третьим требованием является ограничение величины осадки машины под действием собственного веса машины  $\Delta = mg / c < \Delta_*$ . Отсюда

$$c > mg / \Delta_*. \quad (6.20)$$

Условию (6.20) отвечает область, лежащая выше прямой 3.

Наконец, при проектировании машин в силу чисто конструктивных требований всегда имеет место условие  $m^* < m < m^{**}$ , ограничивающее реально приемлемый диапазон изменения массы машины. Этим неравенствам соответствует область, лежащая между прямыми 4 и 4'.

Всем перечисленным требованиям удовлетворяет заштрихованная область, в которой оптимальному решению соответствует точка  $N$ , отвечающая наименьшему значению массы машины. Отсутствие такой области свидетельствует о несовместимости исходных условий, что требует их пересмотра. Чаще всего такая ситуация возникает, когда прямая 3 проходит выше прямой 1; это означает, что заданный предельный коэффициент  $\xi_*$  может быть реализован лишь при осадке машины, большей по сравнению с заданной.

Обратимся теперь к случаю, когда внешняя вынуждающая сила отсутствует, однако центр масс машины  $S$  в течение кинематического цикла меняет свое положение (рис.6.7,б). Как и раньше, ограничимся рассмотрением вертикальных колебаний машины.

Сначала предположим, что остов машины (стойка) жестко закреплен на фундаменте. При этом положение центра масс звеньев определяется следующим векторным равенством:

$$M\mathbf{p}_s = \sum_{i=1}^j m_i \mathbf{p}_i, \quad (6.21)$$

где  $\rho_s$  – радиус-вектор центра масс системы, состоящей из  $j$  подвижных звеньев;  $\rho_i$  – радиус-вектор звена  $i$ ;  $M = \sum_{i=1}^j m_i$ .

Спроецируем (6.21) на ось  $y$  и дважды продифференцируем

$$M\ddot{y}_s = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{y}_i$$

На стойку, а в данном случае и на фундамент, передается реакция  $R_0 = -M\ddot{y}_s$ .

Далее рассмотрим машину на упругой подвеске. Теперь остов уже не является неподвижным, а колеблется по некоторому закону  $y_0(t)$ , равному деформации упругой подвески; при этом ордината центра масс подвижных звеньев в абсолютной системе координат равна  $y_s + y_0$ . Поскольку на остов действуют восстанавливающая сила упругой подвески и суммарная сила инерции подвижных звеньев, то без учета сил сопротивления имеем

$$m_0 \ddot{y}_0 = -c y_0 - M(\ddot{y}_s + \ddot{y}_0)$$

или

$$(m_0 + M) \ddot{y}_0 + c y_0 = -M \ddot{y}_s. \quad (6.22)$$

где  $m_0$  – масса остова;  $c$  – коэффициент жесткости.

Пусть  $y_s \approx y_* \cos \omega t$ . Тогда эффективность виброизоляции может быть оценена как

$$\xi_1 = R_{\max} / R_{0\max} = cA / (y_* \omega^2 M). \quad (6.23)$$

Здесь  $R_{\max} = cA$ , где  $A$  – амплитуда вынужденных колебаний остова.

Дифференциальное уравнение (6.22) приведем к виду

$$\ddot{y}_0 + k^2 y_0 = W_0,$$

где  $k^2 = c / (m_0 + M)$ ;  $W_0 = y_* \omega^2 M / (m_0 + M)$ .

При этом согласно (5.18) при  $\omega > k$  и отсутствии диссипации ( $n = 0$ )

$$A = \frac{W_0}{|k^2 - \omega^2|} = \frac{y_* \omega^2 M}{|(m_0 + M) \omega^2 - c|}. \quad (6.24)$$

При учете (6.24) условие  $\xi_1 < \xi_1$  приводится к виду

$$c < \frac{\xi_{1*}}{1 + \xi_{1*}} (m_0 + M) \omega^2. \quad (6.25)$$

В плоскости параметров  $c - m_0$  (рис.6.8,б) этому требованию отвечает область, лежащая ниже прямой 1, которая в данном случае, строго говоря, не исходит из начала координат, хотя при  $M < m_0$  это смещение весьма мало.

Другим требованием может служить чисто кинематическое ограничение, лимитирующее амплитуду колебаний основания

$$A / y_* < \xi_{2*}. \quad (6.26)$$

Используя (6.24), запишем

$$c < \omega^2 [m_0 - M (\xi_{2*}^{-1} - 1)]. \quad (6.27)$$

Это условие отвечает области, лежащей ниже прямой 2. Условие, ограничивающее осадку,  $\Delta < \Delta_*$  приведем к виду

$$c > g(m_0 + M) / \Delta_*, \quad (6.28)$$

что соответствует области, расположенной выше прямой 3.

Наконец, так же как и в предыдущем случае, имеется ограничение вида  $m_0^* < m_0 < m_0^{**}$  (прямые 4, 4'). Всем условиям удовлетворяется заштрихованная область графика.

Разумеется, помимо перечисленных в инженерной практике возникают более сложные случаи, однако даже на примере рассмотренных простых моделей становится ясным, что выбор параметров системы виброизоляции нередко сопряжен с удовлетворением противоречивых условий, реализация которых требует разумного компромисса.

## 6.5. Динамическое гашение

Динамическим гасителем (ДГ) называют дополнительную массу  $m_2$ , присоединяемую к основной массе  $m_1$  посредством упругого элемента с целью уменьшения амплитуды вынужденных колебаний основной массы (рис.6.9,а).

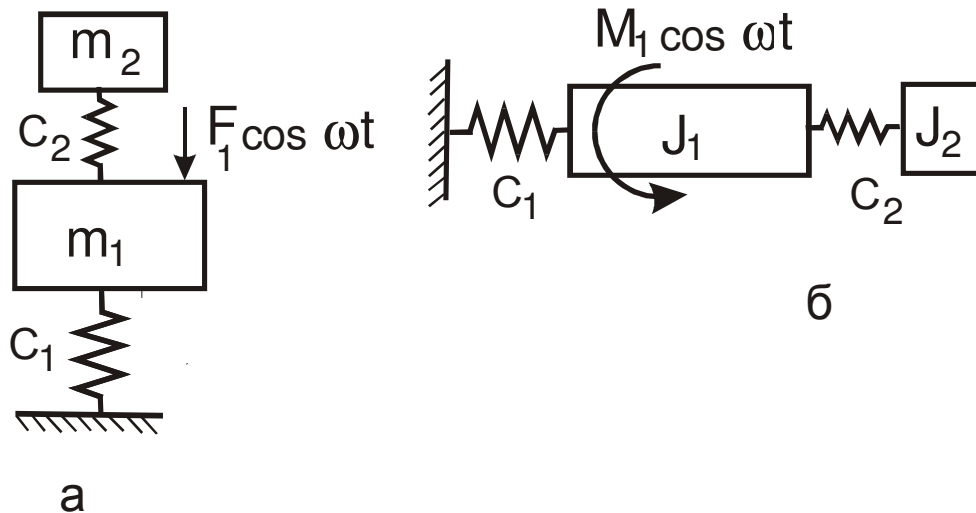


Рис.6.9

В крутильной колебательной системе (рис.6.9,б) роль динамического гасителя выполняет подсистема, состоящая из диска с моментом инерции  $J_2$  и упругого элемента с коэффициентом жесткости  $c_2$ .

В дальнейшем, не сужая общности, основные положения проиллюстрируем для модели, показанной на рис.6.9,а. Пусть к массе  $m_1$  приложена вынуждающая сила  $F_1 \cos \omega t$ . Тогда согласно (5.31) амплитуда вынужденных колебаний массы  $m_1$  равна

$$A_1 = F_1(c_{22} - a_{22}\omega^2) / \Delta(\omega^2). \quad (6.29)$$

При  $c_{22} - a_{22}\omega^2 = 0$  имеем  $A_1 = 0$ . Этому условию отвечает

$$\omega = \omega_* = \sqrt{c_{22} / a_{22}} = p_2, \quad (6.30)$$

где  $p_2$  – соответствующая парциальная частота.

Подчеркнем, что числитель и знаменатель формулы (6.29) одновременно в нуль не обращаются, так как корнем числителя является парциальная частота, а корнем знаменателя  $\Delta(\omega^2) = 0$  – собственная частота, причем, как было показано в п.4.4, эти частоты в общем случае не совпадают.

В рассматриваемом случае  $a_{22} = m_2, c_{22} = c_2$ , поэтому  $\omega_* = \sqrt{c_2 / m_2}$ . Обычно задают, после чего коэффициент жесткости упругого элемента определяется как  $c_2 = m_2 \omega_*^2$ .

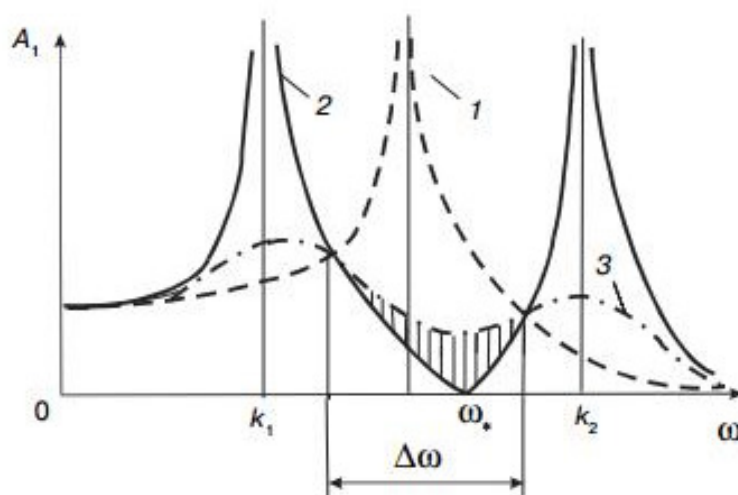


Рис. 6.10

Физическая сущность динамического гашения состоит в том, что при соответствующей настройке реакция со стороны динамического гасителя на основную массу при установившемся режиме равна по величине вынуждающей силе, но противоположна ей по направлению. Динамическое гашение представляет собой частный случай антирезонанса (см. п.5.7).

На рис.6.10 приведены амплитудно-частотные характеристики при отсутствии ДГ (кривая 1) и при его установке (кривая 2). Расчетный режим, при котором  $A_1 = 0$ , отвечает частоте  $\omega_*$ . Если значение  $\omega$  не строго постоянно, а изменяется на некотором частотном диапазоне, возможно существенное увеличение амплитуды  $A_1$  в окрестности резонансных частот  $\omega = k_1$  и  $\omega = k_2$ . В подобных случаях между динамическим гасителем и основной массой дополнительно устанавливают специальное устройство – демпфер, в котором возникает сила сопротивления, обеспечивающая отток энергии колебаний. АЧХ при этом имеет вид кривой 3. Легко заметить, что на частотном диапазоне  $\Delta\omega$ , показанном на рис.6.10 штриховкой, установка демпфера привела к увеличению амплитуд вынужденных колебаний, так как теперь фаза колебаний гасителя не строго противоположна фазе вынуждающей силы. Этот эффект интересен тем, что далеко не всегда введение силы сопротивления приводит к уменьшению амплитуд колебаний.

## 6.6. Динамическая разгрузка

**Динамическая разгрузка при перемещении рабочего органа по гармоническому закону.** Разгружающие устройства применяются для уменьшения вынуждающих сил и реакций в механизмах и в приводе машины, что приводит к снижению энергозатрат, износа, уровня вибраций, шума и в целом создает предпосылки для повышения рабочих скоростей машин.

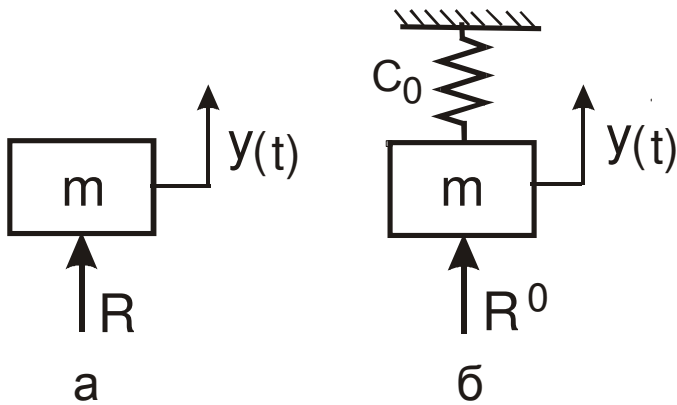


Рис.6.11

максимальное значение реакции пропорционально  $\omega^2$ , динамическая нагрузка для высокоскоростных механизмов может оказаться очень большой.

С целью уменьшения динамической нагрузки установим динамический разгрузатель, который в простейшем случае представляет собой упругий элемент с коэффициентом жесткости  $c_0$ , установленный между рабочим органом и остовом (рис.6.11,б). Теперь  $m\ddot{y} = R^0 - c_0 y$ , где  $R^0$  – реакция после установки разгрузателя. При этом

$$R_{\max}^0 = |c_0 - m\omega^2| y_0. \quad (6.32)$$

График  $R_{\max}^0$  отображен на рис.6.12 кривой 2. При  $\omega = \omega_* = \sqrt{c_0/m}$  имеем  $R_{\max}^0 = 0$ . Точка пересечения обеих кривых определяет частотный интервал  $\omega > \omega_*/\sqrt{2}$ , на котором установка разгрузателя дает положительный эффект. При пуске  $R_{\max}^0(\omega) = c_0 y_0 = m\omega_*^2 y_0$ , поэтому установка разгрузателя приводит к увеличению пускового момента, что является недостатком.

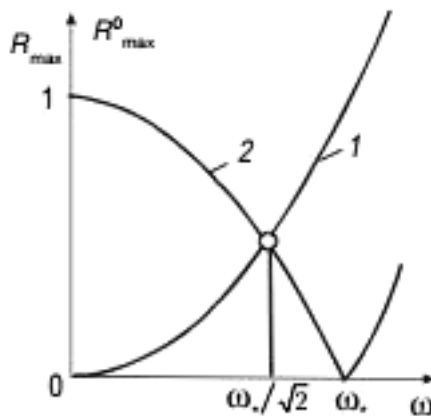


Рис. 6.12

Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется осуществить перемещение рабочего органа машины по закону  $y = y_0 \cos \omega t$  (рис.6.11,а). Определим динамическую реакцию  $R$ , действующую на массу  $m$  стороны механизма  $m\ddot{y} = R$ . Следовательно,

$$R_{\max} = m y_0 \omega^2. \quad (6.31)$$

График  $R_{\max}(\omega^2)$  приведен на рис.6.12 (кривая 1). Поскольку

Подчеркнем, что  $\omega_*$  не совпадает с собственной частотой  $k = \sqrt{(c_0 + c)/m}$ , где  $c$  – приведенный коэффициент жесткости механизма. Обычно  $\omega_* < k$ , и лишь при отсоединении выходного звена от привода ( $c \rightarrow 0$ ) имеем  $\omega_* \rightarrow k$ .

**Динамическая разгрузка при произвольном характере сил, действующих на рабочий орган.** В общем случае абсолютная величина реакции со стороны рабочего органа на привод машины равна

$$|R| = |R_* + U|, \quad (6.33)$$

где  $R_*$  – реакция при отсутствии разгрузителя;  $U$  – дополнительная составляющая реакции за счет установки разгрузителя.

Если воспользоваться пружинным разгрузителем (см. рис.6.11,б), то

$$U = u_0 + u_1 y, \quad (6.34)$$

где  $u_0$  – предварительная деформация пружины;  $u_1 = c_0$  – коэффициент жесткости пружины.

Функция  $R_*(y)$  в общем случае может не совпадать на прямом и обратном ходе. Следуя методу наименьших квадратов, определим параметры  $u_0$  и  $u_1$  таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала

$$\Phi = \oint (R_* + U)^2 dy \rightarrow \min. \quad (6.35)$$

Пусть  $R_*(y)$  является двузначной функцией, а именно  $\vec{R}_*(y)$  – на прямом ходе и  $\bar{R}_*$  – на обратном. Тогда условию (6.35) отвечает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 2 \left[ \int_0^{y_{\max}} (\vec{R}_* + U) \frac{\partial U}{\partial u_i} |dy| + \int_0^{y_{\max}} (\bar{R}_* + U) \frac{\partial U}{\partial u_i} |dy| \right] = 0 \quad (i = 0, 1). \quad (6.36)$$

Пусть  $y = \Pi(\varphi)$ , где  $\varphi$  – угол поворота входного звена. Тогда  $|dy| = |\Pi'(\varphi)| d\varphi$ , где  $\Pi'(\varphi)$  – первая геометрическая передаточная функция механизма. Принимая во внимание, что согласно (6.34)  $\partial U / \partial u_0 = 1$  и  $\partial U / \partial u_1 = y$ , на основании (6.36) получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно  $u_0$  и  $c_0$

$$\left. \begin{aligned} 2\Pi_{\max} u_0 + \Pi_{\max} c_0 &= S_1; \\ \Pi_{\max}^2 u_0 + \frac{2}{3} \Pi_{\max}^3 c_0 &= S_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

где  $S_1 = - \int_0^{2\pi} R_*(\varphi) |\Pi'(\varphi)| d\varphi$ ;  $S_2 = - \int_0^{2\pi} R_*(\varphi) \Pi(\varphi) |\Pi'(\varphi)| d\varphi$ .

Если функция  $R_*(\varphi)$  задана таблицей, графиком или имеет сложный аналитический вид, то для определения  $S_1$  и  $S_2$  может быть использован любой способ численного интегрирования. На основании (6.37) имеем

$$u_0 = (2S_1\Pi_{\max} - 3S_2)/\Pi_{\max}^2; \quad c_0 = 3(2S_2 - \Pi_{\max}S_1)/\Pi_{\max}^3. \quad (6.38)$$

На рис.6.13 в качестве иллюстрации показаны типичные графики  $R_*(y)$ ,  $U(y)$  и график результирующей реакции после установки разгрузителя  $R_1(y) = R_*(y) + U(y)$ . Из графиков следует, что в данном примере максимальная реакция на выходном звене уменьшилось примерно в 4 раза.

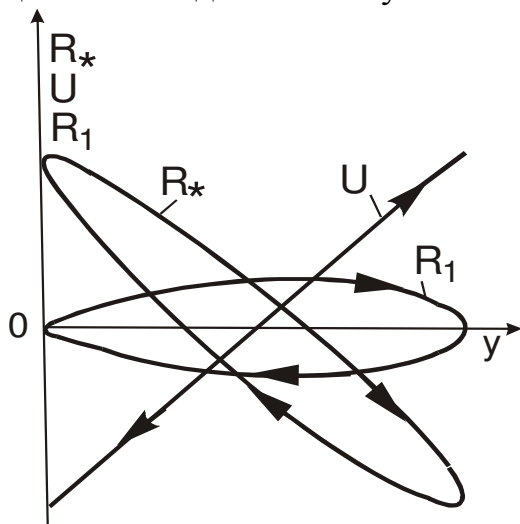


Рис.6.13

При гармоническом перемещении рабочего органа (см. выше) график динамической составляющей реакции  $R_*(y)$  вырождается в прямую, а  $U(y)$  - в ее зеркальное отображение. При этом на расчетной частоте  $\omega_*$  график  $R_1(y)$  совпадает с осью абсцисс, т.е. имеет место абсолютная динамическая разгрузка. В более сложных случаях динамическая разгрузка осуществляется с помощью специальных устройств, снабженных программносителями [14\*].

### 6.7. Синтез колебательных систем с квазипостоянной амплитудно-частотной характеристикой

Этот параграф посвящен синтезу одной из модификаций механизмов циклового действия, для которой при соответствующем выборе параметров удастся осуществить существенную качественную трансформацию традиционной амплитудно-частотной характеристики. Выявленная при этом аномалия этой характеристики может быть использована для создания вибромеханизмов с квазипостоянной амплитудой колебаний исполнительных органов вне зависимости от частоты возмущения. Кроме того, при резонансном соотношении частот и воздействии линейной силы сопротивления обнаружено, на первый взгляд, парадоксальное поведение колебательной системы, при котором амплитуда на резонирующей частоте стремится к нулю.

Обратимся к динамической модели циклового механизма, для конкретизации которого на рис.6.14,а приведен рычажный механизм, установленный на подвижной платформе 0 с массой  $m_0$ .

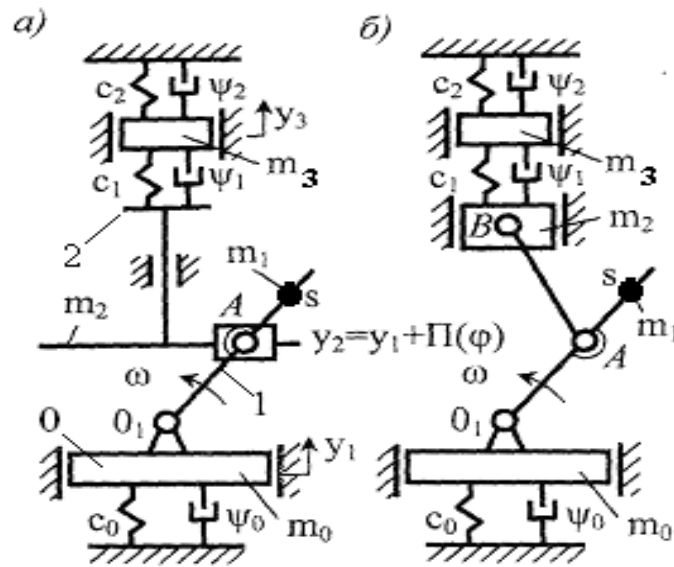


Рис. 6.14

Центр масс входного звена 1 с массой  $m_1$  смещен относительно оси вращения на расстояние  $O_1S = R$ . Между платформой и корпусом установлен упруго-диссипативный элемент с коэффициентом жёсткости  $c_0$  и коэффициентом рассеяния  $\psi_0$ . Выходное звено представлено в виде колебательной цепи  $m_2 - (c_1, \psi_1) - m_3 - (c_2, \psi_2)$  - корпус, где  $m_i, c_i, \psi_i$  - приведенные значения масс, коэффициентов жесткости и рассеяния. Пусть входное звено вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Принимая в качестве обобщенных координат перемещение платформы ( $y_1 = q_1$ ) и перемещение массы  $m_3$  ( $y_3 = q_2$ ) и временно опуская диссипативные члены, запишем систему дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{q}_1 + (c_0 + c_1)q_1 - c_1q_2 &= -c_1r\sin\omega t + m_1\omega^2 R\sin\omega t + m_2\omega^2 r\sin\omega t + Q_1; \\ m_2\ddot{q}_2 - c_1q_1 + (c_1 + c_2)q_2 &= -c_1r\sin\omega t + Q_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

где  $M = m_0 + m_1 + m_2$ ;  $Q_1, Q_2$  - неконсервативные обобщённые силы (сила тяжести может быть исключена из уравнений, так как отсчет обобщенных координат произведен от положения статического равновесия).

Пусть  $y_3 \equiv 0$ ; тогда система имеет одну степень свободы и описывается дифференциальным уравнением

$$M\ddot{q} + b\dot{q} + (c_0 + c_1)q = -[c_1r - \omega^2(m_1R + m_2r)]\sin\omega t, \quad (6.40)$$

где  $b$  приведенный коэффициент линейного сопротивления; здесь и ниже сохранено лишь кинематическое возбуждение ( $Q_i = 0$ ).

Если принять  $c_1r = \omega^2(m_1R + m_2r)$ , то имеет место динамическая разгрузка, при которой на определённой частоте  $\omega_*$  кинематическое возбуждение полностью

компенсируется восстанавливающей силой в упругом элементе  $c_1$ . Однако в данном случае перед нами стоит другая задача – обеспечить колебания платформы с амплитудой, не зависящей (или слабо зависящей) от изменения  $\omega$ .

Согласно (6.40) амплитуда вынужденных колебаний определяется как

$$A = \frac{|c_1 r - \omega^2 (m_1 R + m_2 r)|}{(c_0 + c_1) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}, \quad (6.41)$$

где  $z = \omega / p$  – коэффициент частотной расстройки;  $p \approx \sqrt{(c_0 + c_1) / M}$ ;  $\delta = \psi_* / (4\pi)$  – диссипативный коэффициент;  $\psi_*$  – приведенный коэффициент рассеяния.

При динамическом синтезе системы зададим дополнительное условие:

$$c_1 r / (m_1 R + m_2 r) = p^2. \quad (6.42)$$

При учёте (6.42) на основании (6.41) имеем

$$A = A_* = c_1 r / (c_0 + c_1). \quad (6.43)$$

Полученный результат свидетельствует о нетривиальной ситуации, когда «амплитудно-частотная характеристика» не зависит от частоты возмущения  $\omega$ . При учёте диссипации ( $\delta \neq 0$ ) условие (6.42) приводит к следующему результату:

$$\kappa(z) = A / A_* = 1 / \sqrt{1 + 4\delta^2 z^4 (1 - z^2)^{-2}}, \quad (6.44)$$

При  $z = 1$  имеем  $\kappa(1) = 0$ . Физический смысл этого, на первый взгляд, парадоксального эффекта связан с близостью резонансной и антирезонансной частот, причем в этом динамическом конфликте «побеждает» антирезонанс. График  $\kappa(z)$ , полученный на основании (6.44), приведён на рис 4.20 (кривая 1) Можно предположить большую чувствительность в резонансной зоне к точности выполнения условия (4.69). Возможные нарушения этого условия отразим параметром  $\theta^2 = p^2 (m_1 R + m_2 r) / (c_1 r)$ . При  $\theta = 1$  условие (4.68) соблюдается точно. Можно показать, что при  $\theta \neq 1$

$$\frac{d\kappa}{d(z^2)} = \frac{2(1 - \theta^2 z^2)[(1 - \theta^2)(1 - z^2) - 4z^2\delta^2]}{[(1 - z^2)^2 + 4z^4\delta^2]^2}.$$

Анализ уравнения  $d\kappa / d(z^2) = 0$  показывает, что  $z_1 = \theta^{-1}$  отвечает минимуму (антирезонанс), а  $z_2 = \sqrt{(1 - \theta^2)(1 - \theta^2 - 4\delta^2)}$  – максимуму (резонанс). При отклонении параметра  $\theta^2$  от единицы на величину  $\Delta\theta^2$  в окрестности  $z = 1$  имеем  $\kappa = 0,5 |\Delta\theta^2| \delta^{-1}$ . На рис. 4.20 кривые 2 и 3 отвечают  $\delta = 0,05$ ;  $|\Delta\theta^2| = 0,1$ . На графиках наглядно видно, что резонанс и антирезонанс располагаются на узком частотном диапазоне в окрестности  $z = 1$ . В связи с этим отметим статью [1], в которой анализируются некоторые эффекты, связанные с близостью резонансных и антирезонансных зон.

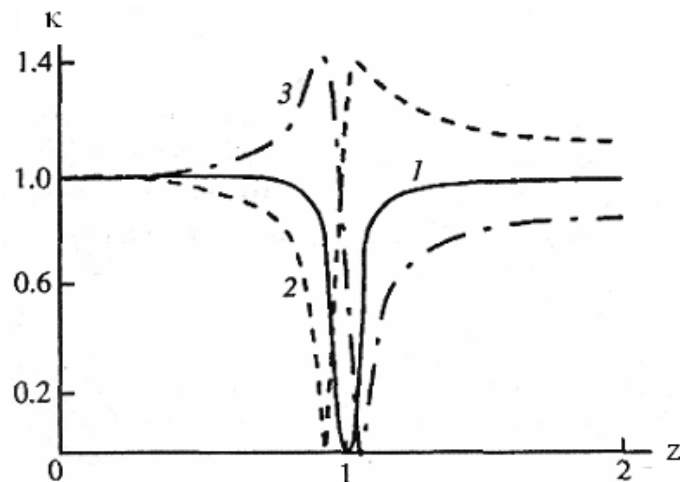


Рис.6.15

Для кривошипно-ползунного механизма (см. рис 6.14, б) функция положения с достаточной точностью может быть описана бигармонической функцией

$$\Pi(\varphi) = r(\sin \varphi + 0,25\lambda \sin 2\varphi),$$

где  $r$  - радиус кривошипа;  $\lambda = r/\ell$ ;  $\ell$  - длина шатуна.

Потребуем, чтобы для основной гармоники  $j=1$  удовлетворялось условие (6.43). Тогда при  $z=1$  ( $\omega = p$ ) имеем  $A_j = 0$ , а при  $z=0,5$  ( $\omega = 0,5p$ ) получим

$$A_1 \approx A_{1*} \quad ; \quad A_2 = 0,125\lambda A_{1*} \frac{m_1 R}{m_1 r \delta} \quad (6.45)$$

При этом предполагается, что масса шатуна статически размещена между шарнирами  $A$  и  $B$ . Из (6.45) следует, что при уравнивании кривошипа ( $R=0$ ) на резонансной частоте по второй гармонике ( $\omega=0,5p$ )  $A_2=0$ . На рис.4.21 показан переход через резонансную зону. Видно, что в зоне резонанса амплитуда резко уменьшается, а при некотором удалении от него практически остаётся постоянной.

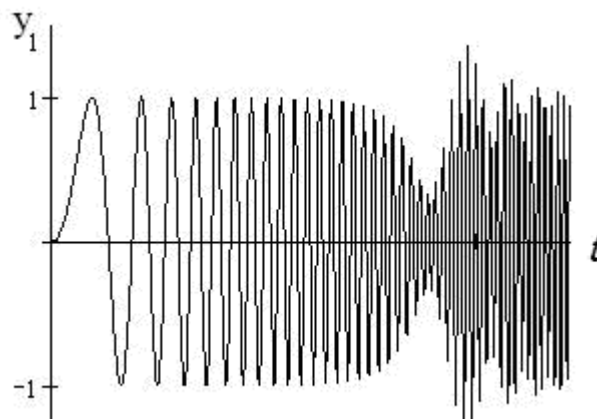


Рис.6.16

## ГЛАВА 7. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 7.1. Простейшие динамические модели с переменными параметрами

Как уже отмечалось в п.1.3, при изменении параметров колебательной системы во времени возбуждаются так называемые параметрические колебания, которые описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Переменность параметров может возникнуть из-за изменения приведенного коэффициента жесткости, с чем мы уже сталкивались при анализе кривошипно-ползунного механизма (см. п.2.4). Аналогичным образом может, например, изменяться приведенная изгибная жесткость игл трикотажной и швейной машины или выдвигного шпинделя металлорежущего станка (рис.7.1,а), поперечная жесткость направляющих шахтного подъемника и др. (рис.7.1,б).

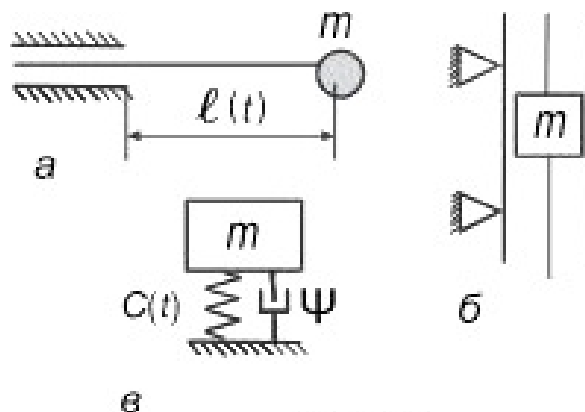


Рис. 7.1

В подобных случаях задача сводится к анализу динамической модели, показанной на рис.7.1,в. Нередко изменение приведенного коэффициента жесткости можно аппроксимировать гармонической функцией вида

$$c(t) = c_0 - \Delta c \sin \Omega t. \quad (7.1)$$

где  $c_0$ ,  $\Delta c$  – среднее значение и амплитуда переменной части коэффициента жесткости (рис.7.2).

Отношение  $\varepsilon = \Delta c / c_0$  называют *глубиной пульсации*, период  $\tau$  – *периодом параметрического возбуждения*, а соответствующую этому периоду частоту  $\Omega = 2\pi / \tau$  – *частотой параметрического возбуждения*.

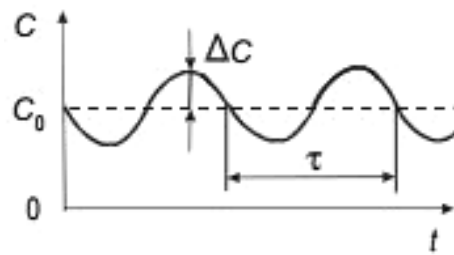


Рис. 7.2

В данной главе мы будем акцентировать внимание на специфических эффектах, возникающих при параметрическом возмущении, поэтому исключим из рассмотрения вынуждающие силы, вызывающие вынужденные колебания. При этом динамическая модель, приведенная на рис.7.1,в, описывается следующим линейным однородным дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + c_0(1 - \varepsilon \sin \Omega t)y = 0. \quad (7.2)$$

Источником параметрического возбуждения может также служить переменность приведенных инерционных характеристик. Рассмотрим модель упругого валопровода с переменным приведенным моментом инерции  $J$  (рис.7.3), уравнение движения которого имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + 0,5\dot{\varphi}^2 J' = M_d - M_c. \quad (7.3)$$

Здесь  $\varphi$  – абсолютная угловая координата звена привода;  $M_d$  – движущий момент;  $M_c$  – момент сопротивления;  $J' = dJ / d\varphi$ .

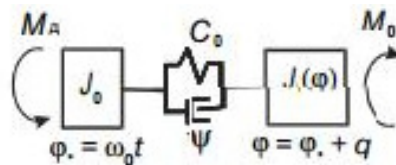


Рис. 7.3

Если считать угловую скорость двигателя  $\omega_0$  постоянной, то координата  $\varphi$  складывается из  $\varphi_* = \omega_0 t$  (переносное движение) и угловой деформации  $q$  (относительное движение). Принимая во внимание, что  $M_d = -c_0 q - b_0 \dot{q}$ , перепишем дифференциальное уравнение (7.3) следующим образом:

$$J(\varphi)\ddot{q} + b_0\dot{q} + 0,5J'(\varphi)(\omega_0 + \dot{q})^2 + c_0 q = -M_c(t). \quad (7.4)$$

Дифференциальное уравнение (7.4) является нелинейным, так как обобщенная координата и ее производная входят в качестве аргументов нелинейных функций. Покажем, что это уравнение ценой малосущественных в динамическом отношении упрощений может быть приведено к виду линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Разложим функции  $J(\varphi)$  и  $J'(\varphi)$  в ряды Тейлора, в которых сохраним два члена разложения

$$\left. \begin{aligned} J(\varphi) &= J_* + J'_*q; \\ J'(\varphi) &= J'_* + J''_*q. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Здесь звездочка отвечает аргументу  $\varphi_* = \omega_0 t$ .

Эту процедуру назовем *линеаризацией в окрестности программного движения*. Не следует смешивать этот прием с линеаризацией, когда нелинейная функция заменяется линейной. В данном случае относительно «большого» аргумента  $\varphi_* = \omega_0 t$  все функции сохранили свои нелинейные свойства, и лишь малые угловые деформации  $q$  вошли в соответствующие функции линейно. Другой нелинейный фактор связан с членом  $(\omega_0 + \dot{q})^2$ , который представим как

$$\omega_0^2(1 + \dot{q}/\omega_0)^2 = \omega_0^2[1 + 2\dot{q}/\omega_0 + (\dot{q}/\omega_0)^2]. \quad (7.6)$$

Отношение  $\dot{q}/\omega_0$  характеризует коэффициент неравномерности движения привода, который при нормальной работе мал и обычно не превосходит  $0,1 \div 0,15$ . Легко убедиться, что последним слагаемым в квадратных скобках выражения (7.6) при этом можно пренебречь.

Подставив (7.5), (7.6) в (7.4) и исключив из рассмотрения малые нелинейные члены, получаем, что данной модели отвечает следующее однородное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$J_*(t)\ddot{q} + [b_0 + J'_*(t)\omega_0]\dot{q} + c_0[1 + \omega_0^2 J''_*(t)/(2c_0)]q = 0. \quad (7.7)$$

Обычно  $\omega_0^2 J''_*/(2c_0) \ll 1$ , что дает возможность дополнительных упрощений. Упрощения, связанные с линеаризацией, позволяют нам в дальнейшем пользоваться весьма важным принципом суперпозиции (см. п.5.8), справедливым лишь для линейных систем. В то же время, как показывает анализ, за исключением некоторых особых случаев, значения отброшенных нелинейных членов таковы, что не оправдывают дальнейших уточнений.

Итак, обобщая рассмотренные случаи, представим дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс при параметрическом возбуждении, в виде

$$a(t)\ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = 0 \quad (7.8)$$

или

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t) = 0, \quad (7.9)$$

где  $2n(t) = b/a = (b_0/a + \dot{a}/a)$ ;  $k^2(t) = c/a$ .

## 7.2. Приближенное решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами методом условного осциллятора

Для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами существуют различные приближенные аналитические методы, изложенные в специальной литературе. Здесь мы воспользуемся одним из них – методом условного осциллятора, хорошо приспособленным к решению задач динамики [2], [3], [7],[7\*]. Заменой переменных преобразуем уравнение (7.9) таким образом, чтобы в нем отсутствовал член, содержащий первую производную координаты. С этой целью воспользуемся подстановкой

$$q = q_1 \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right]. \quad (7.10)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= (\dot{q}_1 - nq) \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right]; \\ \ddot{q} &= (n^2 q_1 - 2n\dot{q}_1 - \dot{n}q_1 + \ddot{q}_1) \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

После подстановки (7.10), (7.11) в (7.9) получаем

$$\ddot{q}_1 + k_1^2(t)q_1 = 0, \quad (7.12)$$

где  $k_1^2 = k^2 - n^2 - \dot{n}$  (в задачах динамики механизмов обычно  $k^2 \gg n^2 + \dot{n}$  и  $k_1^2 \approx k^2$ ).

Функцию  $k(t)$  удобно трактовать как переменную «собственную» частоту. Если  $k^2(t)$  – периодическая функция, то уравнение (7.12) называется уравнением *типа Хилла*, а при гармонической функции – *уравнением Матье*.

Согласно методу условного осциллятора решение уравнения (7.12) ищем в виде

$$q_1 = D(t) \cos \Phi(t). \quad (7.13)$$

При этом

$$\ddot{q}_1 = (\ddot{D} - D\dot{\Phi}^2) \cos \Phi(t) - (2\dot{D}\dot{\Phi} + D\ddot{\Phi}) \sin \Phi(t). \quad (7.14)$$

Подставим (7.13) и (7.14) в (7.12) и уравнием коэффициенты при  $\cos \Phi$  и  $\sin \Phi$  в обеих частях равенства:

$$2\dot{D}p + D\dot{p} = 0; \quad (7.15)$$

$$k^2 - p^2 + \ddot{D}/D = 0. \quad (7.16)$$

Здесь  $p(t) = d\Phi/dt$ .

Условие (7.15) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$dD/D = -0,5dp/p. \quad (7.17)$$

Отсюда

$$D = D_0 \sqrt{p_0/p(t)}, \quad (7.18)$$

где  $D_0 = D(0)$ ;  $p_0 = p(0)$ .

Подставляя (7.18) в (7.13) и возвращаясь с помощью (7.10) к исходной переменной  $q$ , получаем

$$q = D_0 \exp\left[-\int_0^t n(t)dt\right] \sqrt{p_0/p(t)} \cos\left[\int_0^t p(t)dt + \alpha\right], \quad (7.19)$$

где  $D_0$  и  $\alpha$  определяются на основании начальных условий.

Связь между функцией  $p(t)$  и «собственной» частотой  $k(t)$  определяется уравнением (7.16). При учете (7.18) придадим этому уравнению следующий вид, приняв  $z = \ln(p/p_*)$ , где  $p_*$  – произвольный параметр с размерностью частоты, играющий роль нормирующего множителя:

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2p_*^2 e^{2z} = 2k^2(t). \quad (7.20)$$

Дифференциальное уравнение (7.20) соответствует некоторой фиктивной колебательной системе, названной *условным осциллятором*. Достаточно располагать частным решением этого уравнения, чтобы формула (7.19) превратилась в расчетную зависимость, описывающую колебательный процесс.

Подробный анализ уравнения условного осциллятора приведен в монографиях [2], [3]. Здесь мы лишь остановимся на нескольких частных случаях.

**1. Медленное изменение параметров.** Изменение параметров полагают медленным, если их приращение на одном периоде колебаний мало по сравнению со средним значением на этом периоде. Количественным критерием для оценки медленности может служить условие  $\ddot{D}/D \ll k^2$ , что равносильно статическому приложению нагрузки в условном осцилляторе  $|\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2| \ll 2k^2(t)$ .

При этом  $p = p_* e^z \approx k(t)$ .

**2. Пульсация «собственной» частоты около некоторого среднего значения.** Линеаризуем уравнение (7.20), приняв  $e^{2z} \approx 1 + 2z$ , что отвечает первым членам разложения в ряд Маклорена. Кроме того, примем  $k^2(t) = p_*^2 + f(t)$ , где  $p_*^2$  теперь имеет смысл среднего значения «собственной» частоты. Тогда

$$\ddot{z} + 4p_*^2 z = 2f(t). \quad (7.21)$$

Если при разложении в ряд Фурье функция  $f(t)$  содержит гармонику  $j\Omega$ , равную  $2p_*$ , то  $|z| \rightarrow \infty$ , т.е. имеет место резонанс условного осциллятора (см. п. 7.3).

Чтобы выяснить, какую опасность представляет собой резонанс условного осциллятора, необходимо исследовать переменный множитель, определяющий амплитуду в формуле (7.19):

$$U = \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right] p^{-0,5}(t). \quad (7.22)$$

Согласно (7.7) и (7.9) показатель экспоненциального множителя складывается из диссипативной и инерционной составляющих  $n = n_0 + n_1$ , где  $n_1 = 0,5\dot{a}/a$ .

Поскольку

$$\int_0^t n_1 dt = 0,5 \int_0^t \dot{a} a^{-1} dt = \ln \sqrt{a(t)/a(0)},$$

имеем

$$\exp\left(-\int_0^t n dt\right) = \sqrt{a(0)/a(t)} \exp\left[-\int_0^t n_0 dt\right]. \quad (7.23)$$

Экстремальные значения этой функции уменьшаются, так как первый сомножитель – периодическая функция, а второй – бесконечно убывает.

Второй сомножитель формулы (7.22) может быть представлен как

$$p^{-0,5} = p_*^{-0,5} e^{-0,5z}, \quad (7.24)$$

где  $z$  – решение уравнения условного осциллятора.

При  $z_{\min} \rightarrow \infty$ , что возможно при резонансе условного осциллятора, сомножитель (7.24) неограниченно возрастает. Если это возрастание не компенсируется влиянием диссипативной составляющей, то функция  $U$ , а следовательно, и амплитуда колебаний неограниченно возрастают. С позиций энергетического баланса поведение системы в конечном итоге определяется эффектом от поступления энергии за счет параметрического возмущения и оттоком энергии за счет сил сопротивления (подробнее см. п.7.3).

### 7.3. Параметрический резонанс и его подавление

**Параметрический резонанс как проявление динамической неустойчивости системы.** Как было показано в п.7.2, при определенном периодическом изменении параметров можно ожидать бесконечное нарастание амплитуд колебаний даже при отсутствии вынуждающей силы. Это явление называют **параметрическим резонансом**.

Параметрический резонанс есть проявление динамической неустойчивости системы, когда малые возмущения могут привести к существенным изменениям движения системы.

Дадим несколько пояснений в связи с термином **«устойчивость движения»**. Если называть возмущенным движение с измененными начальными условиями, то устойчивость можно рассматривать как свойство возмущенного движения сколь угодно мало отличаться от невозмущенного при достаточно малых начальных возмущениях. Если к тому же при  $t \rightarrow \infty$  движение стремится к невозмущенному, то оно называется асимптотически устойчивым.

В нашем случае из решения (7.19) вытекает, что при  $D_0 = 0$  соответственно  $q = 0$ . Однако достаточно задать малые начальные условия, в силу которых  $D_0 \neq 0$ , чтобы при  $t \rightarrow \infty$  из-за возрастающего экспоненциального множителя получить  $q \rightarrow \infty$ .

Обеспечение условий динамической устойчивости является одной из самых ответственных задач при синтезе механических систем. Практическая важность этих понятий следует, во-первых, из того, что неустойчивое движение является по существу неуправляемым, а значит, любое случайное возмущение на достаточно большом отрезке времени может привести к аварийным последствиям. Кроме того, исследуемая динамическая модель, как уже отмечалось, далеко не полностью эквивалентна своему физическому оригиналу, и поэтому реальная система не может быть точно описана. Отклонения же, вызванные этими неточностями, можно расценивать как возмущения, которые в случае неустойчивости приведут к существенным искажениям полученного решения.

Обычно в качестве наиболее наглядного примера параметрического резонанса приводят раскачивание на качелях, когда, приседая и распрямляясь, мы периодически изменяем расстояние между осью качания и центром масс. Однако при эксплуатации машин это явление далеко не столь безобидно как в приведенном примере. Параметрический резонанс, возникающий при определенной пульсации параметров системы (например, приведенного момента инерции или приведенного коэффициента жесткости), требует достаточно точной частотной настройки. Поэтому он встречается в практике реже силового резонанса и нередко расценивается как маловероятное побочное явление. Между тем, практика эксплуатации многих машин свидетельствует о том, что параметрический резонанс в ряде случаев не только является источником нарушения нормального функционирования механизмов, но может также приводить и к авариям. Так, например, к серьезным последствиям на ранней стадии проектирования паровозов приводила переменность приведенной жесткости приводного механизма колес. Известны также аварии из-за параметрического резонанса, возникающего при пульсации переменного приведенного момента инерции привода машины.

Пусть имеет место пульсация квадрата «собственной» частоты относительно среднего значения  $k_0^2$ , протекающая с некоторой частотой  $\Omega$

$$k^2(t) = k_0^2(1 - \varepsilon \sin \Omega t), \quad (7.25)$$

где  $\varepsilon$  – глубина пульсации.

При этом правая часть уравнения (7.21) равна  $2f(t) = -2\varepsilon k_0^2 \sin \Omega t$ , а следовательно, условный осциллятор резонирует при  $\Omega = 2k_0$ , что соответствует **главному (или основному) параметрическому резонансу**. Более подробный анализ свидетельствует, что помимо этой резонансной частоты области динамической устойчивости располагаются в окрестности значений

$$\Omega_* = 2k_0 / s, \quad (7.26)$$

где  $s = 1, 2, 3, \dots$

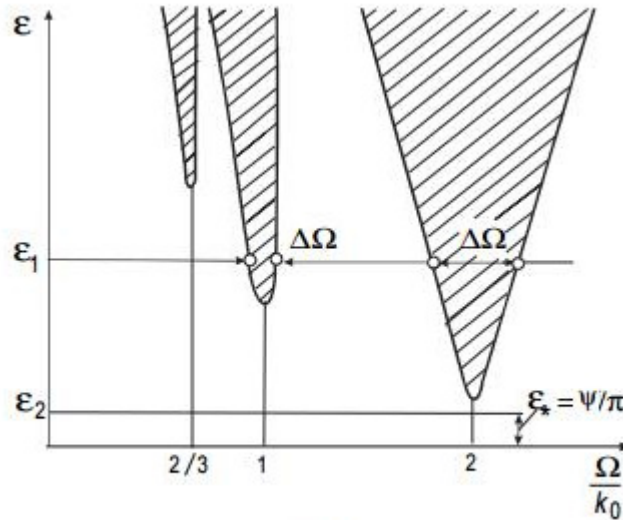


Рис. 7.4

Эти области на координатной плоскости  $\varepsilon - \Omega/k_0$  выделены штриховкой (рис.7.4). Пусть, например,  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , что соответствует на графике прямой, параллельной оси абсцисс. Точки пересечения этой прямой с границами областей динамической неустойчивости ограничивают диапазоны критических частот  $\Delta\Omega$ , на которых имеет место параметрический резонанс.

**Способы устранения параметрического резонанса.** Воспользуемся графиком, приведенным на рис.7.4, чтобы наметить две принципиальные возможности устранения параметрического возбуждения. Первый путь связан с частотной отстройкой от критических зон, при которой значения  $\Omega$  в достаточной степени удаляются от  $\Omega_*$ . Второй путь проиллюстрирован на рис.7.4 прямой  $\varepsilon = \varepsilon_2$ . Очевидно, если  $\varepsilon_2 < \varepsilon_*$ , где  $\varepsilon_*$  – критическое значение глубины пульсации, то прямая  $\varepsilon_2$  не пересекает ни одну из областей неустойчивости, а следовательно, независимо от частоты параметрического возбуждения система динамически устойчива на всем частотном диапазоне.

Для определения критического значения глубины пульсации воспользуемся энергетическим методом. Пусть однородное дифференциальное уравнение имеет вид (7.2), которое перепишем следующим образом:

$$m\ddot{y} + c_0 y = -by + \varepsilon c_0 y \sin \Omega t.$$

Как было показано в п. 5.13,

$$\Delta E_- = -b \int_0^T \dot{y}^2 dt; \quad \Delta E_+ = \varepsilon c_0 \int_0^T y \dot{y} dt,$$

где  $\Delta E_-, \Delta E_+$  – отведенная и подведенная энергии за один период колебаний  $T \approx 2\pi/k_0$  ( $k_0 = \sqrt{c_0/m}$ ).

Приближенно примем, что в пределах одного периода колебаний  $y \approx A \sin(k_0 t + \alpha)$ , где  $A$  – усредненное значение амплитуды на этом периоде. Тогда в соответствии с (5.69)

$$\begin{aligned} \Delta E_- &= 0,5\psi c_0 A^2; \\ \Delta E_+ &= \varepsilon c_0 k_0 A^2 \int_0^T \sin \Omega t \sin(k_0 t + \alpha) \cos(k_0 t + \alpha) dt. \end{aligned}$$

Пусть  $\Omega = \Omega_* = 2k_0$ , что отвечает главному параметрическому резонансу. При этом после интегрирования получаем  $\Delta E_+ = 0,5\varepsilon c_0 A^2 \pi \cos 2\alpha$ . Максимуму подведенной энергии отвечает фазовый сдвиг  $\alpha = 0$ . Итак,

$$\Delta E = \Delta E_+ - \Delta E_- = 0,5\pi c_0 \varepsilon A^2 - 0,5\psi c_0 A^2. \quad (7.27)$$

Затуханию колебаний отвечает  $\Delta E < 0$ . При этом на основании (7.27)

$$\varepsilon < \varepsilon_* = \psi / \pi. \quad (7.28)$$

Таким образом, определенный уровень диссипативных сил служит своеобразным энергетическим барьером, препятствующим параметрическому возбуждению. Отношение  $\varepsilon_* / \varepsilon$  определяет запас устойчивости системы.

Подобным образом может быть также выявлена граница области динамической неустойчивости  $\varepsilon^0$ . С этой целью примем  $\Omega = \Omega_* + \Delta\Omega$ . После аналогичных выкладок и некоторых упрощений получаем

$$\varepsilon^0 \sin \pi \nu / (\pi \nu) = \psi / \pi, \quad (7.29)$$

где  $\nu = \Delta\Omega / \Omega_*$ .

При  $\nu \rightarrow 0$  имеем  $\varepsilon^0 = \varepsilon_* = \psi / \pi$ , что отвечает условию (7.28).

Если вместо линейной силы сопротивления на систему действует сила сухого трения  $P$ , то согласно (5.70)  $\Delta E_- = 4|P|A$ , и условие  $\Delta E_+ - \Delta E_- < 0$  при  $\Omega = 2k_0$  принимает вид

$$A < A_* = 8|P|/(\pi c_0 \varepsilon). \quad (7.30)$$

Это означает, что при постоянной силе сопротивления существует критическое значение амплитуды  $A_*$ , ниже которого обеспечиваются условия динамической устойчивости. При  $A > A_*$  в зоне главного параметрического резонанса амплитуды колебаний будут нарастать.

При нарушении условий динамической устойчивости амплитуды нарастают очень интенсивно. Поэтому даже кратковременное пребывание в критической зоне может привести к аварии. Отсюда следует, что для обеспечения безаварийной и надежной работы высокоскоростных механизмов реализация условия  $\varepsilon < \varepsilon_*$  более оправдана, чем частотная отстройка рабочих режимов от близких критических зон.

Чтобы лучше уяснить физическую сторону вопроса, рассмотрим в несколько упрощенной форме возбуждение параметрического резонанса на модели (рис.7.5,а), которая состоит из невесомого жесткого стержня с массой  $m$  на конце, опирающегося на упругодиссипативный элемент  $(c_0, \psi)$ . Другой конец стержня шарнирно соединен с основанием, которое перемещается в горизонтальном направлении по закону  $x(t) = x_0 \sin \Omega t$ .

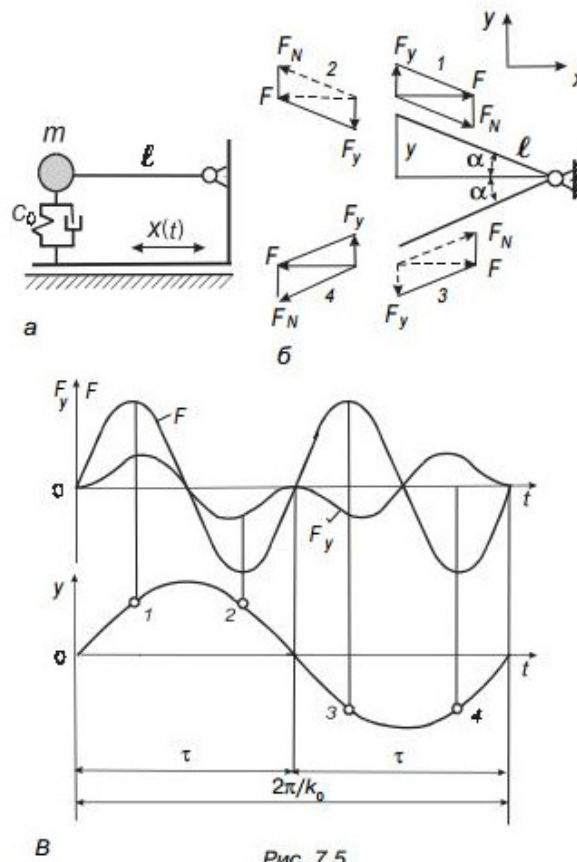


Рис. 7.5

При анализе малых колебаний стержня около положения равновесия в системе координат, жестко связанной с основанием, к массе  $m$  должна быть приложена переносная сила инерции  $F = -m\ddot{x}$ . Разложим силу  $F$  на две составляющие  $F_y$  и  $F_N$ , как это показано на рис.7.5,б, для каждой из четырех фаз колебаний. Поскольку  $F_y = Ftg\alpha \approx Fy/l$ , дифференциальное уравнение малых колебаний имеет вид

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + c_0y = Fy/l$$

или после постановки  $F$  и  $x$

$$\ddot{y} + 2n_0\dot{y} + k_0^2(1 - \varepsilon \sin \Omega t)y = 0, \quad (7.31)$$

где  $k_0^2 = c_0/m$ ;  $2n_0 = b/m = 0,5\psi k_0/\pi$ ;  $\varepsilon = mx_0\Omega^2/(lc_0)$ .

Заметим, что рассмотренный случай не имеет ничего общего с кинематическим возмущением, когда основание колеблется в вертикальном направлении, так как теперь сила  $F_y$  зависит не только от времени, но и от  $y$ .

При  $\Omega \approx 2k_0$ ,  $y \approx A \sin \Omega t$  графики  $y(t)$ ,  $F(t)$ ,  $F_y(t)$  имеют вид, показанный на рис.7.5,в. Легко убедиться в том, что для любой фазы колебаний направление силы  $F_y$  совпадает с направлением скорости колебаний  $\dot{y}$ . Следовательно, эта сила стремится раскачать систему. С другой стороны, сила сопротивления всегда направлена против скорости  $\dot{y}$  и стремится задемпфировать колебания. Результирующий эффект, связанный с этими двумя противоположными тенденциями, зависит от того, удовлетворяется ли условие (7.28). В нашем случае диссипация «побеждает» при

$$\varepsilon = mx_0\Omega^2/(lc_0) = 4x_0/l < \psi/\pi.$$

В заключение отметим одну характерную ошибку при анализе рассматриваемых систем. Основываясь на выражениях типа (7.25), нередко возникает заманчивое предположение, нельзя ли при малой глубине пульсации (по сравнению с единицей) заменить переменную частоту  $k(t)$  ее средним значением  $k_0$ , что, разумеется, привело бы к существенному упрощению задачи. Однако в данном случае за подобное «осреднение» можно очень дорого расплатиться, поскольку при этом игнорируется возможность нарушения условия  $\varepsilon < \varepsilon_*$  и связанная с этим возможность параметрического резонанса.

**Сопоставление параметрического резонанса с силовым.** Во-первых, резонанс силового происхождения представляет собой частный случай вынуж-

жденных колебаний устойчивой системы, а параметрический резонанс, как уже отмечалось, – это проявление неустойчивости равновесного состояния, в силу чего система при строго нулевых начальных условиях остается в положении равновесия, и только неизбежные отклонения от этого положения могут привести к раскачке.

Во-вторых, параметрический резонанс имеет место не только при некоторых дискретных значениях критических частот, но охватывает целую область неустойчивых состояний в окрестности этих частот.

В-третьих, если при силовом резонансе введение линейной силы сопротивления приводит к ограничению резонансной амплитуды, то параметрический резонанс может привести к неограниченной раскачке и при наличии сопротивления, и лишь превышение определенного уровня диссипации устраняет эту опасность.

Наконец, в-четвертых, при параметрическом резонансе амплитуды колебаний нарастают по экспоненциальному закону и обычно очень быстро достигают аварийных значений.

#### 7.4. Особенности свободных колебаний при медленном изменении параметров

Как было показано в п.7.2, при медленном изменении параметров  $p(t) \approx k(t)$ . При этом свободные колебания описываются зависимостью, полученной на основании (7.19):

$$q = D_0 \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right] \sqrt{k(0)/k(t)} \cos\left[\int_0^t k(t) dt + \alpha\right]. \quad (7.32)$$

В системах с постоянными параметрами ( $n = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ ) формула (7.32) описывает затухающие свободные колебания. И в то же время, как и при переменности параметров, даже при их медленном изменении амплитуда колебаний на отдельных временных отрезках может возрастать. Этот динамический эффект наглядно виден на экспериментальной записи (рис.7.6).



Рис.7.6

Зона нарастания колебаний сменяется зоной затухания, образуя своеобразную амплитудную модуляцию колебаний, которая существенно проявляется на уровне виброактивности машин и динамических ошибок законов движения исполнительных органов.

Амплитуда колебаний при медленном изменении параметров пропорциональна функции

$$U = \exp\left[-\int_0^t n(t)dt\right] / \sqrt{k(t)}, \quad (7.33)$$

где  $n = \lambda k / (2\pi) + 0,5\dot{a} / a$ ;  $\lambda$  – логарифмический декремент.

Чтобы исключить возможность увеличения амплитуд, потребуем

$$dU / dt < 0. \quad (7.34)$$

Неравенство (7.34) является *достаточным условием динамической устойчивости на любом отрезке кинематического цикла* [2], [3], [7].

После подстановки (7.33) в (7.34) получим

$$n + 0,5\dot{k} / k > 0. \quad (7.35)$$

Принимая во внимание, что  $k^2 \approx c / a$ , приведем условие (7.35) к виду

$$\lambda > -\frac{\pi\omega_0}{2k(t)} (a' / a + c' / c). \quad (7.36)$$

Здесь  $\omega_0$  – угловая скорость входного звена; штрихом обозначена производная по  $\varphi_0 = \omega_0 t$ .

Условие (7.36) может быть нарушено в зонах, где приведенный инерционный коэффициент  $a(\varphi_0)$  или приведенный коэффициент жесткости уменьшаются. Аналогичные условия могут быть записаны для виброскоростей и виброускорений [2], [3], [7].

При прочих равных условиях, чем выше отношение угловой скорости  $\omega_0$  к «собственной» частоте  $k(t)$ , тем больше возможность проявления зон нарастания амплитуд колебаний. Подчеркнем, что рассматриваемый эффект в отличие от параметрического резонанса не связан с определенной частотой параметрического возмущения.

**Условия квазистационарности.** Во многих современных машинах текстильной, полиграфической, легкой и ряда других отраслей промышленности технологические операции выполняются длинными исполнительными органами, совершающими заданное программное движение [1–7]. Для обеспечения

достаточной жёсткости системы исполнительные органы в таких машинах приводятся в движение многократно дублированными цикловыми механизмами. При этом колебательная система имеет структуру решётки, в которой каждый повторяющийся элемент образует замкнутый контур, отображающий инерционные и упругодиссипативные характеристики главного вала, исполнительного органа и циклового механизма. На рис. 1,а показаны два механизма, связывающие главный вал с исполнительным органом, схематизированные в виде динамической модели, приведенной на рис. 1,б.

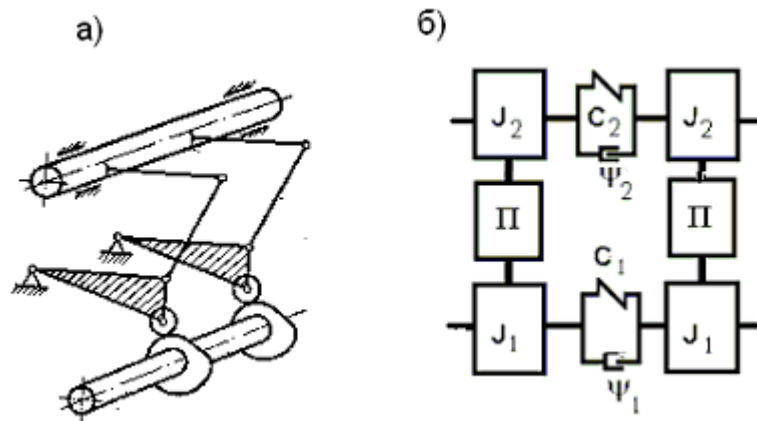


Рис. 7.7

Эта динамическая модель трансформируется в систему, состоящую из вала с приведенным коэффициентом крутильной жёсткости  $c^* = c_1 + c_2\Pi'^2(\varphi_*)$  и исполнительного органа с приведенным моментом инерции  $J^* = J_1 + J_2\Pi'^2(\varphi_*)$ . Данная система имеет две степени свободы, причём одна из обобщенных координат является циклической. Тогда единственная частота свободных колебаний («собственная» частота) определяется как

$$k(\varphi_*) = \sqrt{c^*(\varphi_*)/J^*(\varphi_*)} = k_1\sqrt{[1 + \zeta\Pi'^2(\varphi_*)]/[1 + \mu\Pi'^2(\varphi_*)]}, \quad (7.37)$$

где  $k_1 = \sqrt{c_1/J_1}$ ;  $\zeta = c_2/c_1$ ;  $\mu = J_2/J_1$ .

Из-за переменности функции  $\Pi'(\varphi_*)$  «собственная» частота  $k$  в общем случае также оказывается переменной, однако при  $\zeta = \mu$  имеем  $k = k_1 = \text{const}$ . Это условие, которое можно квалифицировать как условие квазистационарности, совпадает с равенством парциальных частот  $\sqrt{c_1/J_1} = \sqrt{c_2/J_2} = k_1$ . При выполнении условия квазистационарности согласно (7.35)  $n(\varphi_*) = \lambda k_1 / (2\pi) + n_g > 0$ . Первое слагаемое в левой части неравенства равно положительной константе, а второе – соответствует гироскопической составляющей обобщенной силы, работа которой за период равна нулю. Таким образом, неравенство удовлетворяется, а следовательно, возможность параметрического резонанса исключена.

## ГЛАВА 8. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

### 8.1. Общие сведения о динамических задачах в нелинейной постановке и методах их решения

Нелинейные колебания описываются нелинейными уравнениями или системой таких уравнений. Так, например, свободные колебания маятника  $\theta(t)$  могут быть изучены на базе нелинейного дифференциального уравнения

$$\ddot{\theta} + gL^{-1} \sin \theta = 0, \quad (8.1)$$

где  $L$  – длина маятника;  $g$  – ускорение свободного падения.

В нелинейное дифференциальное уравнение обобщенная координата или ее производные входят нелинейно. (Не следует путать нелинейное дифференциальное уравнение с линейным неоднородным дифференциальным уравнением, в котором правая часть может быть нелинейной функцией времени.)

Как уже отмечалось в п.2.3, во многих случаях удается осуществить приближенную замену нелинейной характеристики линейной. Такую процедуру называют *линеаризацией*. Так, в дифференциальном уравнении (8.1) при малых значениях  $\theta$  можно принять  $\sin \theta \approx \theta$ , после чего это уравнение оказывается линейным. Однако такая замена не всегда возможна.

Обращение к нелинейной модели обычно вызвано тем, что многие существенные динамические явления не вмещаются в рамки линейной теории и не могут быть с ее помощью ни объяснены, ни описаны. К нелинейным эффектам, например, относятся зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды; существование нескольких режимов вынужденных колебаний при фиксированной частоте вынуждающей силы; так называемые субгармонические колебания, частота которых отличается от частоты возмущения; автоколебания и др. Использование же нелинейных моделей только для уточнения результатов, полученных на базе линейной теории, обычно играет второстепенную роль.

В задачах динамики механизмов нелинейные силы могут иметь различную природу. Среди них можно выделить следующие:

- нелинейные восстанавливающие силы при отклонениях упругих характеристик от закона Гука (см. рис.2.4,а);

- нелинейные диссипативные силы (так, например, сила кулонова трения описывается нелинейной функцией вида  $P = -|P| \operatorname{sign} \dot{q}$ ;

- нелинейные силы, возникающие в механизмах с нелинейной функцией положения, когда линеаризация в окрестности программного движения (см. п.7.1) невозможна из-за больших колебаний ведущих звеньев [5];

- нелинейные силы, связанные с конструктивными особенностями механической системы.

В качестве соответствующих нелинейных элементов могут служить зазоры (рис.8.1,а), ограничители (рис.8.1,б), специальные нелинейные муфты, в которых передаваемый момент  $M$  зависит от угловой деформации упругих элементов муфты  $\Delta\varphi$ , конические пружины и др. (рис.8.1,в,г). Отметим, что для характеристик восстанавливающих сил или моментов, показанных на рис.8.1,а,б,в,г, проиллюстрированный в п.2.3 способ линеаризации в окрестности точек излома принципиально не возможен даже при малых колебаниях. Такие случаи относят к **существенно нелинейным колебаниям**.

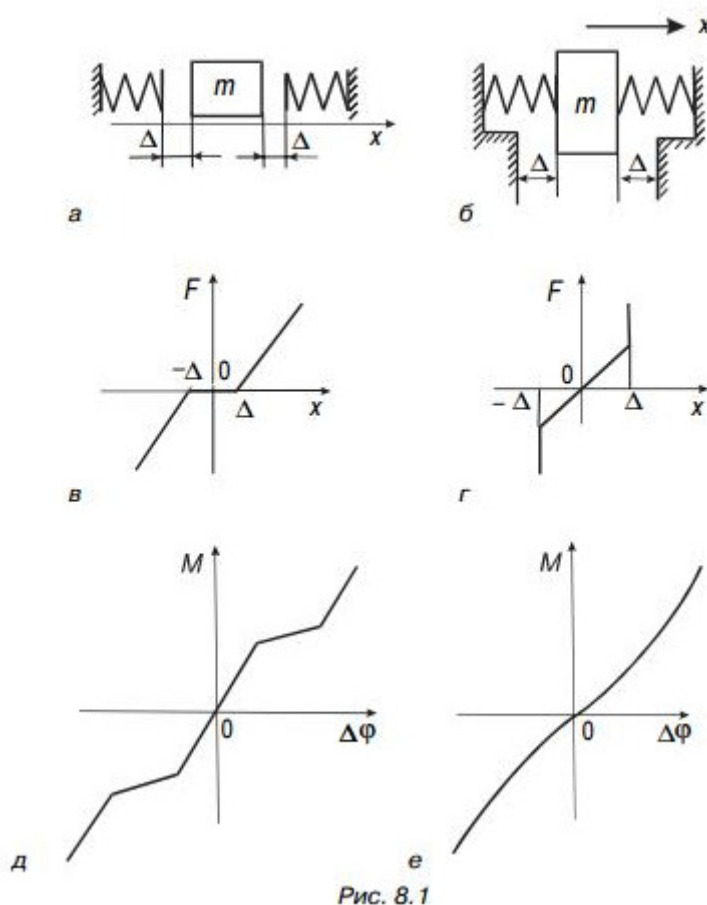


Рис. 8.1

Нелинейные свойства механических систем нередко целенаправленно используются для получения требуемых динамических эффектов, применяемых во многих отраслях техники [6\*]. Однако наряду с этим приходится сталкиваться и с нежелательными нелинейными эффектами, например, с ударными явлениями в зазорах, явлением затягивания в резонансных зонах, с фрикционными автоколебаниями и др. (см. ниже).

Нелинейные системы и методы их исследования составляют развивающуюся ветвь теории колебаний и теории автоматического управления. Повышенная сложность изучения этих систем и их инженерного расчета по сравне-

нию с линейными связана с тем, что за исключением некоторых частных случаев, обычно не представляющих большого практического интереса, отсутствуют точные решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому при исследовании нелинейных систем широко используются приближенные методы как численные, так и аналитические. Опыт решения нелинейных задач в различных отраслях техники убедительно свидетельствует о том, что эти задачи требуют от исследователя более высокого уровня понимания характера изучаемых явлений и возникающих нелинейных эффектов; последнее невысказано без владения аналитическими методами даже в тех случаях, когда при расчетах используются численные методы. Таким образом, при анализе нелинейных колебаний также следует стремиться к разумному сочетанию численных и аналитических методов.

Методам решения нелинейных задач теории колебаний посвящено большое число монографий и учебных пособий. Ниже мы остановимся лишь на нескольких методах, дающих возможность выявить характерные нелинейные эффекты и прогнозировать поведение нелинейных колебательных систем.

## 8.2. Дельта-метод

Представим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{q} + f_1(q, \dot{q}) = f_2(t) \quad (8.2)$$

в следующем виде

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(q, \dot{q}, t), \quad (8.3)$$

где  $f(q, \dot{q}, t) = f_2(t) - f_1(q, \dot{q}) + k_0^2 q$ .

Параметр  $k_0^2$  удобно выбрать таким образом, чтобы при малых колебаниях  $\partial f_1 / \partial q \rightarrow k_0^2$ . Так, например, в дифференциальном уравнении (8.1) при  $\theta = q$ ,  $f_1(q) = g \sin(q/L)$ ,  $\partial f_1 / \partial q = g \cos(q/L)$ . При  $q \rightarrow 0$  имеем  $\cos q \rightarrow 1$ , следовательно,  $k_0^2 = g/L$ . Другими словами, мы выделяем в нелинейной восстанавливающей силе линейную составляющую.

Введем в рассмотрение «безразмерное время»  $\varphi = k_0 t$ . Очевидно, что

$$\dot{q} = dq/dt = (dq/d\varphi) \cdot (d\varphi/dt) = q' k_0.$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерному времени  $\varphi$ . Аналогичным образом получаем  $\ddot{q} = k_0^2 q''$ , после чего уравнение (8.3) приводится к виду

$$q'' + q = \Delta(q, q', \varphi), \quad (8.4)$$

где  $\Delta = f/k_0^2$ .

Построим фазовую траекторию, отвечающую уравнению (8.4) (см. п.5.13), принимая  $q = x$ ,  $q' = y$ . Для этого предварительно представим  $q''$  как

$$q'' = dq'/d\varphi = (dy/dx) \cdot (dx/d\varphi) = ydy/dx,$$

после чего уравнение (8.4) представим в виде

$$ydy + (x - \Delta)dx = 0. \quad (8.5)$$

Если на малом отрезке безразмерного времени  $\Delta\varphi$  считать функцию  $\Delta$  постоянной, то уравнение (8.5) может быть проинтегрировано в общем виде:

$$y^2 + (x - \Delta)^2 = R^2, \quad (8.6)$$

где  $R^2$  – некоторая константа.

Уравнение (8.6) описывает на фазовой плоскости окружность радиуса  $R$  с центром, смещенным по оси  $x$  на величину  $\Delta$ . Для построения фазовой траектории зададимся начальными условиями  $q_0, \dot{q}_0$ , определяющими на фазовой плоскости точку  $M_0$  с координатами  $x_0 = q_0$  и  $y_0 = \dot{q}_0/k_0$  (рис.8.2,а).

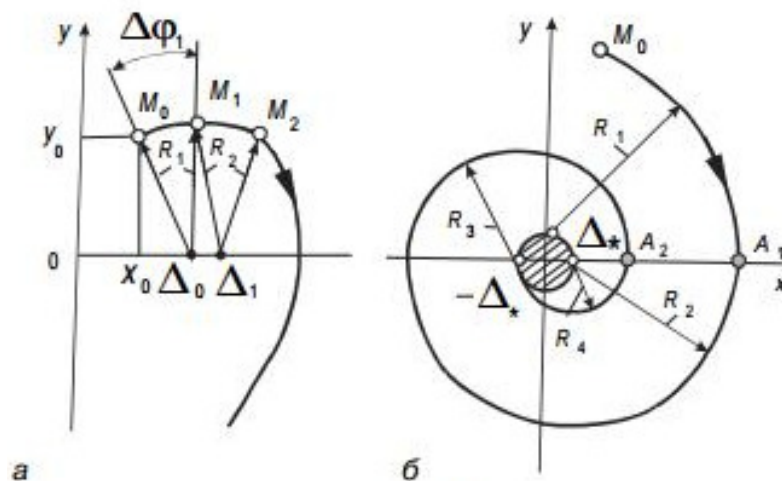


Рис. 8.2

При этом начальное положение центра окружности определяется как  $\Delta_0(x_0, y_0, \varphi_0 = 0)$ . Проведем из этого центра небольшую дугу радиусом  $R_1$  (обычно угол  $\Delta\varphi$  выбирается равным  $10^\circ - 15^\circ$ ). При этом определяется точка

$M_1$  с координатами  $x_1, y_1$ . Чтобы найти безразмерное время  $\Delta\varphi_1$ , соответствующее этой точке, запишем очевидное равенство  $\bar{y}_1\Delta\varphi_1 = \Delta x_1$ , где  $\bar{y}_1 = 0,5(y_0 + y_1)$  – средняя безразмерная скорость на данном участке;  $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ . Легко убедиться в том, что  $\Delta\varphi_1 \approx \Delta x_1 / \bar{y}_1$  совпадает с углом (в радианах), отвечающим дуге  $M_0M_1$ .

Итак, мы располагаем значениями  $x_1, y_1$  и  $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi_1$ , с помощью которых находим новое значение  $\Delta_1$ , после чего изложенное построение повторяется. Аналогичным образом строится вся фазовая траектория. Поскольку каждый следующий шаг основан на информации, полученной на предыдущем шаге, дельта-метод при большом числе шагов дает значительную накопленную погрешность. Поэтому данный метод целесообразно использовать для оценки поведения нелинейных систем на ограниченных отрезках времени, отвечающих переходным режимам (раскачка, затухание). В качестве примера построим фазовую траекторию, соответствующую затухающим колебаниям при постоянно силе трения  $P = -|P|\text{sign}\dot{q}$  (см. п.4.3). После приведенных выше элементарных преобразований уравнения (4.17), (4.18) принимают вид

$$\begin{aligned} q'' + q &= -\Delta_* & \text{при } q' > 0; \\ q'' + q &= \Delta_* & \text{при } q' < 0, \end{aligned}$$

где  $\Delta_* = |P|/c$ ,  $c$  – коэффициент жесткости.

Таким образом, в верхней полуплоскости фазовая траектория представляет собой окружность с центром  $x_{ц} = -\Delta_*$ , а в нижней – с центром  $x_{ц} = \Delta_*$  (рис. 8.2,б). После того, как фазовая траектория пересекает окружность радиуса  $\Delta_*$ , движение прекращается.

Разумеется, при современном уровне компьютерного моделирования данный метод претендует лишь на качественную оценку при оценке результатов.

### 8.3. Метод гармонической линеаризации

При изложении этого метода внимание будет акцентироваться лишь на прикладной стороне вопроса; его обоснование приводится в специальной литературе.

Пусть восстанавливающая сила и сила сопротивления описываются нелинейной функцией  $-P(q, \dot{q})$ . Тогда дифференциальное уравнение, описывающее колебания системы с одной степенью свободы при гармонической вынуждающей силе, принимает вид

$$a\ddot{q} + P(q, \dot{q}) = F_0 + F_1 \sin \omega t \quad (8.7)$$

или после деления на инерционный коэффициент  $a$

$$\ddot{q} + U(q, \dot{q}) = W_0 + W_1 \sin \omega t, \quad (8.8)$$

где  $U = P/a$ ;  $W_0 = F_0/a$ ;  $W_1 = F_1/a$ .

По аналогии с линейной колебательной системой приближенное решение уравнения (8.8) будем искать в форме

$$q^0 = A_0 + A \sin(\omega t - \gamma). \quad (8.9)$$

После подстановки (8.9) в  $U(q, \dot{q})$  эта функция оказывается периодической, а следовательно, ее можно представить в виде ряда Фурье

$$U(q^0, \dot{q}^0) = U_0 + U_c \cos \varphi + U_s \sin \varphi + \text{высшие гармоники}, \quad (8.10)$$

где  $\varphi = \omega t - \gamma$ .

Примем, что высшие гармоники (8.10) оказывают малое влияние на формирование приближенного решения (8.9), т.е. на  $A_0, A_1$ . Это допущение реализуется, если колебания близки к гармоническим. При этом суждение о справедливости такого предположения должно базироваться на физических предпосылках, например, на эксперименте, опыте эксплуатации и т.п. Отметим, что в задачах нелинейной механики эффективность приближенных аналитических методов во многом зависит от того, насколько правильно «угадана» форма приближенного решения.

Далее введем в рассмотрение формально линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{q}^0 + 2n\dot{q}^0 + k^2 q^0 + S = W_0 + W_1 \sin \omega t, \quad (8.11)$$

где  $n, k^2$  – некоторые неизвестные функции, а  $S$  – неизвестная координата.

С другой стороны, уравнение (8.8) при учете (8.9), (8.10) и приведенных выше допущений может быть записано как

$$\ddot{q}^0 + U_c \cos \varphi + U_s \sin \varphi + U_0 = W_0 + W_1 \sin \omega t. \quad (8.12)$$

Сопоставляя (8.12) и (8.11), получаем

$$2n\dot{q}^0 + k^2 q^0 + S = U_c \cos \varphi + U_s \sin \varphi + U_0.$$

Тогда, учитывая (8.9), после уравнивания коэффициентов при  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  и свободных членов

$$k^2 A_0 + S = U_0; \quad 2nA\omega = U_c; \quad k^2 A = U_s.$$

Используя формулы для определения коэффициентов Фурье, окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} S(A, A_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(q^0, \dot{q}^0) d\varphi - k^2(A, A_0)A_0; \\ 2n(A, A_0) &= \frac{1}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} U(q^0, \dot{q}^0) \cos \varphi d\varphi; \\ k^2(A, A_0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} U(q^0, \dot{q}^0) \sin \varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Эти функции называют **коэффициентами гармонической линеаризации**. Итак, при принятых допущениях нелинейное дифференциальное уравнение (8.8) в рамках принятого приближенного решения оказалось эквивалентным некоторому формально линейному дифференциальному уравнению (8.11), коэффициенты которого  $n$ ,  $k^2$ ,  $S$  являются известными функциями от неизвестных параметров решения  $A, A_0$ .

При малых значениях  $n$  функция  $k$  соответствует частоте свободных колебаний, которая теперь, в отличие от линейного случая, зависит от амплитудного уровня.

Коэффициент  $2n$ , как и при линейных колебаниях, характеризует диссипативные свойства системы, которые, как уже отмечалось, в инженерных задачах обычно оцениваются с помощью коэффициента рассеяния  $\psi$  или логарифмического декремента  $\lambda$ . Для формального линейного уравнения (8.11) справедлива зависимость  $n/k = \delta = \lambda/(2\pi)$ . При этом

$$2n(A, A_0) = \lambda k(A, A_0) / \pi. \quad (8.14)$$

Можно показать, что зависимость (8.14) при учете принятого приближенного решения (8.9) энергетически эквивалентна соответствующему выражению в формулах (8.13), однако нередко она более удобна при решении инженерных задач, так как аналитическое описание диссипативной силы во многих случаях не представляется возможным или затруднено. Между тем определение параметров  $\lambda$  или  $\psi$  обычно затруднений не вызывает даже в тех случаях, когда эти параметры зависят от амплитудного уровня  $A, A_0$ .

Строго говоря, реальные диссипативные силы, возникающие при колебаниях механизмов и машин, всегда нелинейны, поэтому их учет в предыдущих главах, посвященных линейным колебаниям, по существу, также отвечает гармонической линейаризации этих сил. В этом случае согласно (8.14) при  $k = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$  имеем  $n = \text{const}$ , что позволяет пользоваться при анализе колебаний линейными дифференциальными уравнениями.

Отметим следующее важное свойство коэффициентов линейаризации, позволяющее сводить сложные нелинейные функции к комбинации более простых. Если нелинейная функция  $U$  может быть представлена в виде суммы  $U = \sum_{i=1}^s U_i$ , то коэффициенты гармонической линейаризации определяются как сумма соответствующих парциальных значений

$$n = \sum_{i=1}^s n_i; \quad k^2 = \sum_{i=1}^s k_i^2; \quad U = \sum_{i=1}^s U_{oi}.$$

При этом к виду функций  $U(q, \dot{q})$  не представляется каких-либо лимитирующих требований; в частности, они могут быть составлены из отдельных отрезков и иметь разрывы первого рода. Подчеркнем, что гармоническая линейаризация в отличие от обычной линейаризации, когда нелинейная функция подменяется линейной, не требует, чтобы  $q$  и  $\dot{q}$  были достаточно малы. Единственное ограничение здесь состоит в близости к гармоническим колебаниям.

#### 8.4. Вынужденные нелинейные колебания

**Амплитудно-частотная характеристика.** Для большей наглядности рассмотрим распространенный случай, когда  $U_0 = 0$  и  $A_0 = 0$ , что соответствует отсутствию постоянной составляющей в вынуждающей силе ( $F_0 = 0$ ) и нечетной функции  $P(q)$ , описывающей в уравнении (8.7) нелинейную восстанавливающую силу ( $P(q) = -P(-q)$ ).

Для решения уравнения (8.11), полученного методом гармонической линейаризации, воспользуемся формулами (5.18), (5.19)

$$A = \frac{W_1}{\sqrt{[k^2(A) - \omega^2]^2 + 4n^2(A)\omega^2}}; \quad (8.15)$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{2n(A)\omega}{k^2(A) - \omega^2}. \quad (8.16)$$

Однако, как уже отмечалось в п.8.3, за произведенную линеаризацию приходится расплачиваться тем, что коэффициенты гармонической линеаризации  $k^2$  и  $n$  являются функциями от неизвестной амплитуды вынужденных колебаний  $A$ . Поэтому, если в линейной системе формула (8.15) служит конечной расчетной зависимостью, то теперь она является уравнением относительно  $A$ .

Для построения амплитудно-частотной характеристики  $A(\omega)$  удобно воспользоваться следующим приемом. Возведем обе части уравнения (8.15) в квадрат и запишем его следующим образом:

$$A^2 \{ [k^2(A) - \omega^2]^2 + 4n^2(A)\omega^2 \} = W_1^2. \quad (8.17)$$

Относительно  $\omega$  уравнение (8.17) является биквадратным, что дает возможность, задаваясь в заданном диапазоне значениями  $A$ , определять соответствующие значения  $\omega$  как корни этого уравнения. Резонансному режиму отвечает условие

$$k(A_*) = \omega, \quad (8.18)$$

где  $A_*$  – резонансная амплитуда.

Тогда согласно (8.15)

$$2n(A_*)A_*\omega = W_1$$

или при учете (8.14), (8.18) –

$$\lambda A_* k^2(A_*) / \pi = W_1. \quad (8.19)$$

Таким образом, резонансную амплитуду  $A_*$  можно определять как корень уравнения (8.19); при этом сдвиг фазы  $\gamma$  согласно (8.16) равен  $\pi/2$ .

Рассмотрим характерные особенности нелинейных вынужденных колебаний на примере системы с кубической характеристикой восстанавливающей силы вида  $-c_0 q(1 + \xi q^2)$ . При  $\xi > 0$  характеристика «жесткая», при  $\xi < 0$  – «мягкая», а при  $\xi = 0$  – линейная (см. рис.2.4). В нашем случае уравнение (8.7) имеет вид

$$a\ddot{q} + b_0\dot{q} + c_0q(1 + \xi q^2) = F_1 \sin \omega t,$$

а после деления на коэффициент  $a$

$$\ddot{q} + 2n_0\dot{q} + k_0^2q(1 + \xi q^2) = W_1 \sin \omega t, \quad (8.20)$$

где  $2n_0 = b_0/a$ ;  $k_0^2 = c_0/a$ .

Итак, с учетом сделанных выше оговорок относительно симметричности нелинейности и колебательного процесса

$$\left. \begin{aligned} U(q^0, \dot{q}^0) &= 2n_0 A \omega \cos \varphi + k_0^2 A \sin \varphi (1 + \xi A^2 \sin^2 \varphi); \\ q^0 &= A \sin \varphi; \varphi = \omega t - \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Согласно (8.13)

$$\begin{aligned} 2n(A) &= (\pi A \omega)^{-1} \int_0^{2\pi} [2n_0 A \omega \cos \varphi + k_0^2 (A \sin \varphi + \xi A^3 \sin^3 \varphi)] \cos \varphi d\varphi; \\ k^2(A) &= (\pi A)^{-1} \int_0^{2\pi} [2n_0 A \omega \cos \varphi + k_0^2 (A \sin \varphi + \xi A^3 \sin^3 \varphi)] \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

После интегрирования получаем  $2n = 2n_0$  и

$$k^2(A) = (1 + 0,75\xi A^2)k_0^2. \quad (8.22)$$

Более общий случай при  $U_0 \neq 0$ ,  $A_0 \neq 0$  см. [1],[4\*].

Зависимость  $\omega = k_0 \sqrt{1 + 0,75\xi A^2}$ , полученная из (8.22) при  $k = \omega$ , определяет так называемую скелетную кривую, показанную на графиках  $A(\omega)$  штрихпунктирной линией (рис.8.3). Для построения АЧХ подставим (8.22) в уравнение (8.17) и преобразуем его к виду биквадратного уравнения относительно  $\omega$  (см. п.8.3)

$$\omega^4 - 2[k^2(A) - 2n^2(A)]\omega^2 + k^4(A) - W_1^2 / A^2 = 0.$$

После решения этого уравнения получаем

$$\omega = \sqrt{k^2(A) - 2n^2(A) \pm \sqrt{W_1^2 / A^2 - 4n^2(A)[k^2(A) - n^2(A)]}}. \quad (8.23)$$

При  $\xi > 0$  («жесткая» характеристика) резонансный пик наклоняется вправо (рис.8.3,а), а при  $\xi < 0$  («мягкая» характеристика) – влево (рис.8.3,б). Наклон АЧХ привел к тому, что на определенном частотном диапазоне, ограниченном точками перегиба, **фиксированному значению частоты вынуждающей силы соответствует несколько значений амплитуд вынужденных колебаний** ( $A_1, A_2, A_3$ ). Кроме того, зона повышенных амплитуд теперь охватывает значительно больший частотный диапазон по сравнению с АЧХ в линейной системе.

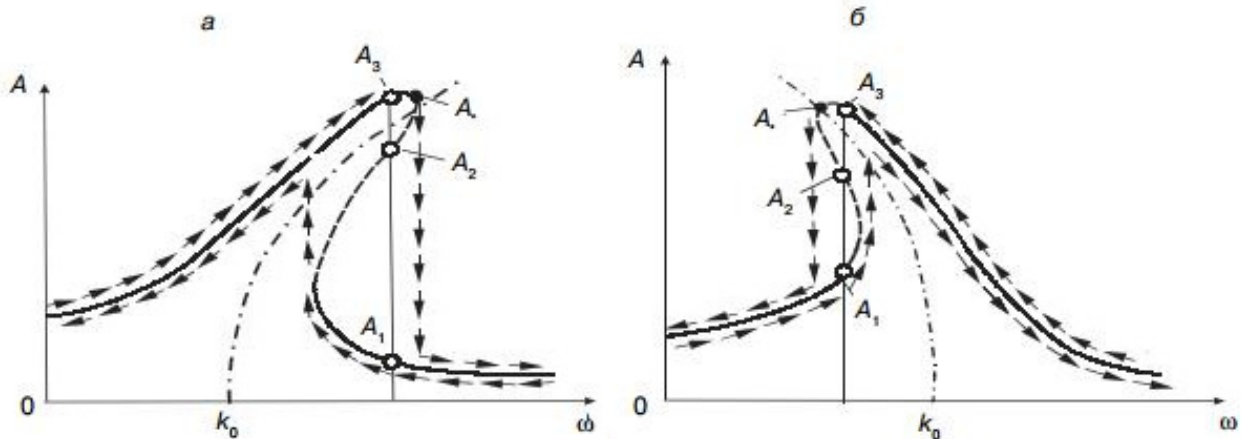


Рис. 8.3

Резонансная амплитуда  $A_*$  определяется из уравнения (8.19) при учете (8.22):

$$A_*(1 + 0,75\xi A_*^2)\lambda k_0^2 - \pi W_1 = 0. \quad (8.24)$$

На АЧХ стрелками показано изменение амплитуд при плавном увеличении или уменьшении частоты  $\omega$ . В окрестности точек перегиба имеют место перескоки с одной ветви характеристики на другую, что сопровождается скачкообразным изменением амплитуд вынужденных колебаний. Таким образом, реализация того или иного режима может зависеть от условий выхода на этот режим.

**Устойчивость режимов вынужденных колебаний.** Для решения вопроса об устойчивости выявленных периодических режимов воспользуемся энергетическим методом (см. п.5.13). При вынужденных колебаниях вносимая энергия определяется как  $\Delta E_+ = \pi A F_1 \sin \gamma$ , а отводимая – как  $\Delta E_- = 2\pi n \omega A^2 a$ .



Рис. 8.4

На рис.8.4 приведен примерный график  $\Delta E = \Delta E_+ - \Delta E_-$  для фиксированного значения  $\omega$ , которому соответствуют три установившихся режима с амплитудами  $A_1, A_2, A_3$ . Очевидно, что если подводимая к системе энергия больше отводимой ( $\Delta E > 0$ ), то амплитуда колебаний будет возрастать и, наоборот, если  $\Delta E < 0$ , – убывать. При  $\Delta E = 0$  режим будет установившимся. Однако для практической реализации этого режима необходимо, чтобы он к тому же был

устойчивым или, другими словами, чтобы при отклонениях  $\Delta A_i = A - A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имело место  $\Delta A_i \rightarrow 0$ ;  $A \rightarrow A_i$ . Используя эти элементарные соображения, легко убедиться в том, что устойчивым режимам отвечают амплитуды  $A_1$  и  $A_3$ , а амплитуда  $A_2$  – неустойчивому. Условию устойчивости можно придать вид

$$\partial(\Delta E)/\partial A < 0 \quad (A = A_i) \quad (8.25)$$

При этом оказывается, что устойчивым режимам в дорезонансной зоне соответствует положительный наклон АЧХ, а в резонансной зоне – отрицательный наклон АЧХ. При этом ветви АЧХ, показанные на рис.8.3 штриховой линией, отвечают неустойчивым режимам. Неустойчивая ветвь АЧХ ограничена точками перегиба, в которых касательная к графику  $A(\omega)$  вертикальна.

Несмотря на то, что неустойчивые режимы практически не могут быть реализованы, соответствующая этим режимам ветвь АЧХ представляет определенный интерес. Пусть, например, система колебалась в устойчивом режиме с амплитудой  $A_1$ , а затем в результате какого-либо случайного возмущения (например, удара) получила приращение амплитуды  $\Delta A > 0$ . Очевидно, что если  $A_1 + \Delta A < A_2$ , то  $\Delta E < 0$ , а следовательно, мы вернемся к режиму  $A = A_1$ . Однако при  $A_1 + \Delta A > A_2$  оказывается, что  $\Delta E > 0$ , и тогда дальнейшие колебания системы будут происходить с амплитудой  $A_3$ .

Аналогичным образом выявляется зависимость реализуемого режима вынужденных колебаний от начальных условий. Если начальная амплитуда  $A_0$  меньше  $A_2$ , то  $A \rightarrow A_1$ , а при  $A_0 > A_2$   $A \rightarrow A_3$ . Таким образом, неустойчивый режим в первом приближении служит своеобразным «водоразделом» между двумя устойчивыми режимами.

**Субгармонический резонанс.** Помимо рассмотренных режимов вынужденных колебаний в нелинейных системах возможно возбуждение *субгармонических резонансов*, частота которых равна  $\omega/j$ , где  $j > 1$  – целое число. Происхождение этих режимов связано с влиянием высших гармоник нелинейной функции  $U(q^0, \dot{q}^0)$ , которые ранее при использовании разложения (8.10) были отброшены.

Возможность возникновения этих режимов покажем на примере. Как было показано в п.5.13, любой резонансный режим можно рассматривать как «незатухающие» свободные колебания при условии, что отрицательная работа сил сопротивления компенсируется работой вынуждающей силы на данном режиме. Для математического описания подобных режимов воспользуемся уравнением (8.20), приняв  $n_0 = 0$  и  $W_1 = 0$ . Свободные колебания будем искать в виде

$$q = A_1 \cos kt + A_3 \cos 3kt. \quad (8.26)$$

Напомним, что ранее при изложении метода гармонической линеаризации (см. п.8.3) мы сохранили лишь основную гармонику, а высшими гармониками пренебрегли. Далее, используя тождество  $\cos^3 kt = 0,75 \cos kt + 0,25 \cos 3kt$ , подставим при приведенных выше допущениях предполагаемое решение (8.26) в уравнение (8.20) и сгруппируем члены при  $\cos kt$  и  $\cos 3kt$ . Поскольку коэффициенты при этих функциях при свободных колебаниях обращаются в нуль, получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - k_0^2)A_1 - 0,75\xi k_0^2 A_1^3 - 0,75\xi k_0^2 (A_1 + 2A_3) &= 0; \\ (9k^2 - k_0^2)A_3 - 0,75\xi k_0^2 A_3^3 + 0,25\xi k_0^2 A_1^2 (A_1 + 6A_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Примем, что  $\alpha = A_3 / A_1 \ll 1$ . Тогда из первого уравнения системы (8.27) следует, что  $k_2(A) = k_0^2(1 + 0,75\xi A_1^2)$ , причем этот результат полностью совпадает с формулой (8.22), полученной методом гармонической линеаризации. (Заметим, что на основании точного решения, которое выражается через эллиптические функции, можно показать, что  $\alpha < 0,045$  [1]). При малых значениях  $\alpha$  согласно второму уравнению системы (8.27) имеем

$$\alpha(A_1) = 0,25\xi k_0^2 A_1^2 / [9k^2(A_1) - k_0^2]. \quad (8.28)$$

Далее обратимся к анализу вынужденных колебаний. Пусть гармоническая вынуждающая сила имеет вид  $F_j \cos(\Omega(t) + \gamma)$ . Возникает вопрос, при каких условиях эта сила может возбудить резонансные колебания на частоте  $\omega = \Omega / j$ , где  $j$  – целое число. Для определенности ниже примем  $j = 3$ , что согласно принятой терминологии соответствует субгармоническому резонансу порядка  $1/3$ . Сначала определим величину рассеянной энергии за один период колебаний  $2\pi / \omega$  при амплитуде, равной  $A_1$

$$\Delta E_- = \psi V_{\max} = \psi c_0 \int_0^{A_1} q(1 + \xi q^2) dq.$$

Здесь  $\psi$  – коэффициент рассеяния;  $V_{\max}$  – максимальное значение потенциальной энергии;  $c_0 = ak_0^2$  – коэффициент жесткости при  $q \rightarrow 0$ ;  $a$  – инерционный коэффициент.

После интегрирования имеем

$$\Delta E_- = 0,5ak_0^2\psi(1 + 0,5\xi A_1^2)A_1^2. \quad (8.29)$$

Эта отведенная из механической системы энергия должна компенсироваться работой вынуждающей силы, которая согласно (5.68) в нашем случае определяется как

$$\Delta E_+ = F_3 \int_0^{2\pi/\omega} \cos(3\omega t + \gamma) \dot{q} dt. \quad (8.30)$$

Принимая  $q = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t$ , после подстановки в (8.30) и интегрировании получаем

$$\Delta E_+ = 3\pi F_3 A_3 \sin \gamma. \quad (8.31)$$

Как уже отмечалось, резонансный режим соответствует «поддержанным» вынуждающей силой свободным колебаниям, поэтому соотношение между  $A_3$  и  $A_1$  определяется формулой (8.28), т.е. как  $A_3 = \alpha(A_1)A_1$ . При этом условие существования субгармонического резонанса может быть записано следующим образом:  $\Delta E_- < (\Delta E_+)_{\max}$ . Отсюда, используя (8.29) и (8.31), окончательно имеем

$$\psi < \psi_* = \frac{6\pi F_3 \alpha(A_1)}{ak_0^2 A_1 (1 + 0,5\xi A_1^2)}. \quad (8.32)$$

Амплитуде  $A_1$  на амплитудно-частотной характеристике соответствует точка скелетной кривой. При этом

$$A_1 = 2\sqrt{(\omega^2 - k_0^2)/(3\xi k_0^2)}. \quad (8.33)$$

Максимальная амплитуда  $A_1$ , отвечающая условию (8.32), соответствует наибольшему отводу энергии.

Для амплитуды  $A_1$  существует также граница снизу, так как при малых значениях  $A_1$  система приближается к линейной, поскольку согласно (8.31) и (8.28) при этом быстро уменьшается амплитуда третьей гармоники, а следовательно, и работа вынуждающей силы [1].

В предельном случае при  $\xi = 0$ , что соответствует линейной системе, функция  $\alpha(A_1)$  согласно (8.28) обращается в нуль, а следовательно, условие (8.32) не может быть выполнено, и субгармонические резонансы не возникают.

Итак, субгармонические резонансы обычно возникают при сочетании сильных нелинейностей и слабой диссипации.

Для исключения возможности возбуждения субгармонического резонанса порядка  $1/3$  при рассмотренной кубичной нелинейности должно с некоторым запасом удовлетворяться условие  $\psi > \psi_*$ . На рис.8.5 в качестве иллюстрации приведены результаты компьютерного моделирования при  $\xi = 0,5$ ,  $\psi = 0,063$  и  $\psi_* = 0,15$ . Сопоставление графиков  $q(t)$  и  $F(t)$  свидетельствует о трехкратном уменьшении частоты вынужденных колебаний по сравнению с частотой вынуждающей силы.



Рис. 8.5

### Общие итоги анализа нелинейных вынужденных колебаний.

1. Скелетная кривая АЧХ, отражающая связь между частотой свободных колебаний и амплитудой, при «жесткой» упругой характеристике наклоняется вправо, а при «мягкой» – влево.

2. Имеется частотный диапазон, на котором фиксированному значению частоты вынуждающей силы отвечает несколько режимов вынужденных колебаний ( $A_1, A_2, A_3$ ).

3. Наряду с устойчивыми режимами ( $A_1, A_3$ ) имеют место и неустойчивые режимы ( $A_2$ ).

4. Реализация того или иного устойчивого режима зависит от начальных условий и характера изменения  $\omega$  при выходе на этот режим (увеличение или уменьшение  $\omega$ ).

5. Неустойчивая ветвь АЧХ в первом приближении служит границей зон притяжения к соседним устойчивым режимам ( $A \rightarrow A_1$  при  $A < A_2$ ;  $A \rightarrow A_3$  при  $A > A_2$ ).

6. Амплитуда вынужденных колебаний  $A_*$  в точке срыва с одной устойчивой ветви АЧХ на другую, определяется уровнем диссипации (см. формулу (8.19)).

7. Частотный диапазон, отвечающий повышенному уровню амплитуд, значительно больше соответствующего диапазона при линейных колебаниях. При

этом наблюдается эффект «затягивания», при котором переход через резонансную зону сопровождается изменением гармонически линеаризованной частоты свободных колебаний  $k(A)$ . В результате происходит своеобразное затягивание в резонансное состояние, затрудняющее быстрое и безаварийное пересечение этой зоны.

8. В нелинейных системах возбуждение вынужденных колебаний может происходить как на основной частоте  $\omega$ , так и на частотах  $\omega/j$ , где  $j = 2, 3, \dots$  (субгармонические резонансы).

### 8.5. Общие сведения об автоколебаниях

В нелинейных системах установившиеся периодические режимы могут возникать и при отсутствии периодической вынуждающей силы. *Установившиеся колебания, которые возникают в нелинейной системе при неколебательном источнике энергии (или при источнике энергии с существенно отличающейся частотой) и регулируются движением самой системы, называются автоколебаниями.*

В природе и технике автоколебательные системы представлены чрезвычайно широко. Автоколебательными системами являются сердце, легкие, смычковые и духовые музыкальные инструменты, часы, паровая машина, двигатель внутреннего сгорания, генератор переменного тока, пневмоинструмент и др. Особый класс автоколебаний, встречающийся в машинах и механизмах, связан со специфическим влиянием сил трения на колебательную систему. Это так называемые *фрикционные автоколебания*, которые ниже будут рассмотрены более подробно.

**Структура автоколебательной системы.** Независимо от физической природы автоколебаний в автоколебательной системе в явном или неявном виде всегда присутствуют следующие элементы (рис.8.6): источник энергии (ИЭ), регулирующий орган или клапан (РО), колебательный контур (КК) и обратная связь (ОС), управляющая регулирующим органом в зависимости от колебательного процесса.

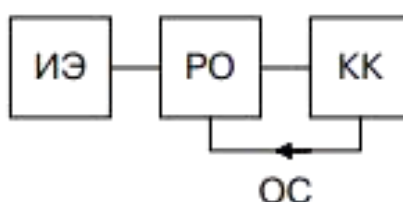


Рис. 8.6

Так, например, в паровой машине источником энергии является приблизительно постоянное давление пара, регулирующим органом – золотники, переключающие поступление пара из одной полости цилиндра в другую, колебательным контуром – система «поршень – цилиндр» и обратной связью – механизм, перемещающий золотники в зависимости от положения поршня. В результате – постоянное давление пара трансформируется в колебательное движение поршня.

В механических часах источником энергии служит предварительно деформированная пружина или поднятый груз, а регулирующим органом – анкерное устройство, с помощью которого в каждом цикле система получает импульс, компенсирующий потери на преодоление сил сопротивления. С этой точки зрения, *автоколебания можно рассматривать как свободные колебания нелинейной системы, в которой отрицательная работа сил трения компенсируется за счет внешнего источника.*

**Условия энергетического баланса при автоколебаниях.** Различают два случая выхода на режим автоколебаний. При так называемом *мягком самовозбуждении* изменение энергии колебаний за один цикл  $\Delta E(A) = \Delta E_+ - \Delta E_-$  происходит в соответствии с графиком, приведенном на рис.8.7,а. Напомним, что  $\Delta E_+$  – подводимая энергия за счет внешнего источника, а  $\Delta E_-$  – отводимая энергия за счет сил сопротивления. В этом случае положение равновесия  $A = 0$  оказывается неустойчивым, так как при отклонении от этого положения  $\Delta E > 0$ , а следовательно, начнется раскачка. При  $A = A_*$  имеем  $\Delta E = 0$ , что отвечает установившимся колебаниям с постоянной амплитудой. В устойчивости этого режима легко убедиться, если дать малые отклонения  $\Delta A$ . Поскольку  $\Delta E > 0$  при  $A < A_*$  и  $\Delta E < 0$  при  $A > A_*$ , имеем  $A \rightarrow A_*$ .

При *жестком возбуждении* (рис.8.7,б) положение равновесия  $A = 0$  – устойчиво, стационарный режим с амплитудой  $A_{*1}$  – неустойчив, а с амплитудой  $A_{*2}$  – устойчив.

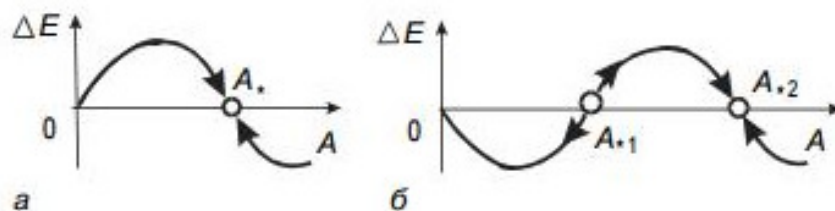


Рис. 8.7

Таким образом, в этом случае для возбуждения автоколебаний требуются некоторые ненулевые начальные условия, при которых  $A > A_{*1}$ . Подобную картину мы наблюдаем в маятниковых часах, для запуска которых маятник следует отвести дальше некоторого критического положения.

На фазовой плоскости (рис.8.8) режиму с амплитудой  $A_{*1}$  отвечает так называемый **неустойчивый предельный цикл 1**, от которого спирали «разбегаются» в разные стороны. При начальных условиях, соответствующих точкам за пределами неустойчивого предельного цикла, спирали наматываются на **устойчивый предельный цикл 2** с амплитудой  $A_{*2}$ . Точку **0** называют **фокусом**.

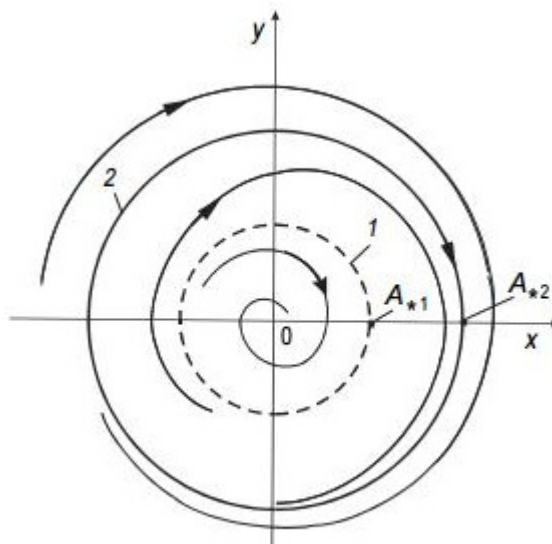


Рис. 8.8

Рассмотренные случаи объединяет одно общее требование: **устойчивому режиму автоколебаний предшествует область динамической неустойчивости, при которой  $\Delta E_+ > \Delta E_-$  ( $\Delta E > 0$ )**. В дифференциальной форме этому требованию отвечает условие (8.24). Итак, для возникновения автоколебаний необходимым условием служит появление области динамической неустойчивости, которая может быть обнаружена на уровне линейного приближения. Однако для непосредственного определения амплитуды автоколебаний необходимо решить задачу в нелинейной постановке.

Может возникнуть вопрос, почему стационарные автоколебательные режимы возможны лишь в нелинейных системах. Представим себе, что в автономной системе (т.е. при отсутствии вынуждающих сил) все силы линейно зависят от  $q$  и  $\dot{q}$ . Тогда в соответствии с формулой (5.68) изменение энергии за один период пропорционально квадрату амплитуды, т.е.  $\Delta E = \zeta A^2$ , где  $\zeta$  – коэффициент пропорциональности. При  $\Delta E < 0$  ( $\zeta < 0$ ) колебания затухают, а при  $\Delta E > 0$  ( $\zeta > 0$ ) имеет место раскачка. Таким образом, при  $A \neq 0$  исключена возможность выполнения условия  $\Delta E(A) = 0$ . (Случай  $\zeta = 0$  должен быть исключен из рассмотрения как соответствующий неустойчивому состоянию, поскольку любое отклонение  $\zeta$  приводит к одному из перечисленных выше режимов.) Графически подводимая энергия  $\Delta E_+$  и отводимая энергия  $\Delta E_-$  в ли-

нейной системе отображаются двумя параболой, проходящими через начало координат и нигде не пересекающимися. В этом случае система либо не возбуждается вовсе, либо амплитуда колебаний неограниченно растет. Отсюда следует, что *режим автоколебаний возможен только в нелинейной системе.*

**Виды автоколебаний.** Различают два вида автоколебаний - *квазигармонические (или квазилинейные) и релаксационные.* Внешние различия этих двух видов автоколебаний проявляются в их форме. При квазигармонических автоколебаниях их график близок к синусоиде, а частота по существу равна частоте свободных колебаний нелинейной системы, которая, как уже упоминалось, в общем случае зависит от амплитуды (рис.8.9,а). Примером квазигармонических автоколебаний служат колебания маятника часов.

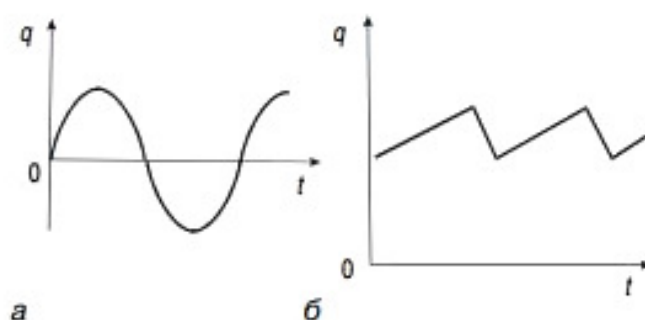


Рис. 8.9

Релаксационные автоколебания резко отличаются от гармонических функций и нередко принимают форму разрывных колебаний или близкую к ней форму пилообразной характеристики (рис.8.9,б). При релаксационных автоколебаниях происходит накопление энергии до определенного уровня, после чего наступает срыв и повторение процесса. Отсюда и название этого вида автоколебаний, происходящее от латинского слова «relaxatio» – уменьшение, ослабление. При релаксационных автоколебаниях, по существу, задан перепад уровня колебаний, частота же определяется в зависимости от характеристики процесса. В качестве наглядного примера можно привести колебания крышки чайника при кипении воды или процесс образования капель при неплотно закрытом кране. Методы расчета и дополнительные пояснения, связанные с обоими видами автоколебаний, рассмотрим на примере фрикционных автоколебаний.

### 8.6. Фрикционные автоколебания

Под этим термином понимают колебания, обусловленные трением. В виде различных скрипов фрикционные автоколебания воспринимаются нами по-

стоянно. Достаточно вспомнить скрип паркета, дверей, скрежет трамвая на повороте и даже чудесный звук скрипки. Но фрикционные автоколебания имеют не только акустическую природу, а оказывают и большое влияние при решении многих технических задач. Чаще всего фрикционные автоколебания возникают при медленных перемещениях ползунов по направляющим скольжения или при вращении валов с малыми угловыми скоростями, что, как правило, отрицательно сказывается на технологическом процессе. В частности, в металлорежущих станках при перемещениях тяжелых узлов вместо требуемого равномерного движения может возникнуть движение с периодическими остановками («скачки»), исключающими возможность точной подачи инструмента. Аналогичное явление наблюдается в вытяжных цилиндрах прядильных машин; при этом из-за автоколебаний возникает неровнота пряжи и повышается ее обрывность. С фрикционными автоколебаниями иногда приходится сталкиваться и при эксплуатации транспортных средств, особенно при торможении. Автоколебания инструмента при резании металла также во многом обусловлены силами трения.

**Релаксационные автоколебания.** Обратимся к модели, показанной на рис.8.10. Представим, что от звена 1, перемещающегося с постоянной скоростью  $v_0 > 0$ , движение через упругодиссипативный элемент 2 передается звену 3, обладающему массой  $m$ , к которому приложена сила трения  $F$ .

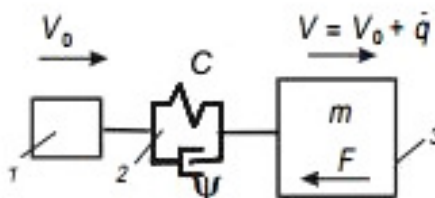


Рис. 8.10

В качестве обобщенной координаты примем деформацию упругого элемента  $q$ : тогда скорость звена 3 равна  $v = v_0 + \dot{q}$ . Очевидно, что при постоянной силе трения  $F = F_0 = \text{const}$  имеем  $q = -F_0/c = \text{const}$ , а следовательно,  $v = v_0$ . Однако сила трения зависит в числе многих факторов и от скорости скольжения, поэтому в общем случае  $F(v) \neq \text{const}$ ; при этом  $\dot{q} \neq 0$ . Примем упрощенную характеристику сил трения, согласно которой при отсутствии скольжения ( $v = 0$ ) сила трения равна силе трения покоя  $F = F_0$ , а при движении ( $v > 0$ )  $F = F_1 < F_0$  (рис.8.11,а).

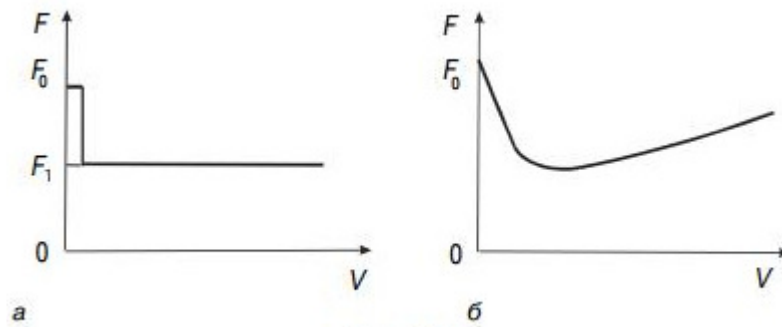


Рис. 8.11

Запишем дифференциальное уравнение для фазы движения массы  $m$  ( $0 < t < t_1$ )

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -F_1, \quad (8.34)$$

где  $b = \psi\sqrt{cm/(2\pi)}$  – коэффициент эквивалентного линейного сопротивления;  $\psi$  – коэффициент рассеяния.

Преобразуем уравнение (8.34) к виду

$$\ddot{q} + k^2q = -F_1/m - 2n\dot{q}, \quad (8.35)$$

где  $k^2 = c/m$ ;  $2n = b/m$ .

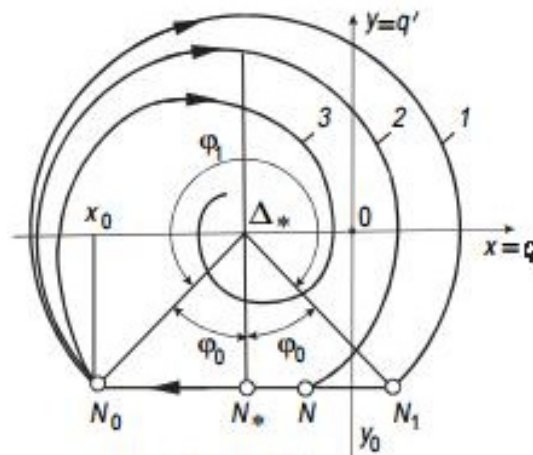


Рис. 8.12

Построим фазовый портрет, отвечающий уравнению (8.35), с помощью дельта-метода (см. п.8.2). С этой целью введем «безразмерное время»  $\varphi = kt$ . Тогда,

$$q'' + q = \Delta(q'), \quad (8.36)$$

где  $\Delta = -F_1/c - 2\delta q'$ ;  $\delta = n/k = \lambda/(2\pi)$ ; штрихом обозначена производная по  $\varphi$ .

Сначала рассмотрим случай, когда отсутствует линейное сопротивление ( $\delta = 0$ ). При этом на участке движения  $\Delta_* = -F_1/c = \text{const}$ , следовательно, согласно (8.6) фазовая траектория представляет собой окружность с центром в точке  $\Delta_*$  (рис.8.12, кривая 1).

Установим начальные условия. Поскольку движение начнется лишь тогда, когда восстанавливающая сила уравнивает силу покоя, при  $t = 0$  имеем  $q_0 = -F_0/c$ . Второе начальное условие определяется исходя из очевидного равенства  $v = v_0 + \dot{q} = 0$ ; отсюда  $\dot{q}_0 = -v_0$ . Этим начальным условиям отвечает на фазовой плоскости точка  $N_0$  с координатами  $x_0 = q_0$  и  $y_0 = \dot{q}_0 = -v_0/k$ .

Движение массы будет продолжаться до тех пор, пока фазовая траектория не придет в точку  $N_1$ . Этой точке отвечает  $v = v_0 + \dot{q} = 0$ , поэтому сила трения становится равной силе трения покоя  $F_0$ . На участке выстоя  $y = -v_0/k = \text{const}$ , поэтому фазовая траектория представляет собой прямую  $N_1N_0$ , после чего описанный выше колебательный процесс повторяется. Итак, равномерное движение входного звена 1 трансформировалось в релаксационные автоколебания с остановками. Участку движения («скачку») отвечает угол  $\varphi_1 = 2\pi - 2\varphi_0$  и отрезок времени  $t_1 = \varphi_1/k$ . Угол  $\varphi_0$  определяется как

$$\varphi_0 = \arctg |(x_0 - \Delta_*)/y_0| = \arctg [k\Delta F / (cv_0)]. \quad (8.37)$$

Здесь  $\Delta F = F_0 - F_1$  – перепад сил трения покоя и движения.

Период автоколебаний  $\tau = t_2$  найдем исходя из очевидного равенства пути, пройденного звеном 1 и массой  $m$  за один цикл

$$\Delta s = v_0\tau = v_0t_1 + q(t_1) - q_0,$$

причем

$$q(t_1) - q_0 = N_0N_1 = 2\Delta F/c.$$

При учете, что  $t_1 = \varphi_1/k = 2(\pi - \varphi_0)/k$ , получаем

$$\tau = (2\pi - 2\varphi_0)/k + 2\Delta F / (cv_0). \quad (8.38)$$

Безразмерное значение периода автоколебаний равно

$$\varphi_2 = k\tau = 2\pi + 2(\text{tg } \varphi_0 - \varphi_0). \quad (8.39)$$

Из зависимостей (8.37)–(8.39) следует, что при  $\Delta F \rightarrow 0$  имеем  $\varphi_0 \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 2\pi/k$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 2\pi$ .

«Амплитуда» колебаний  $A_0$  определяется как

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(\Delta F/c)^2 + (v_0/k)^2}. \quad (8.40)$$

Далее учтем силу линейного сопротивления, влияние которой проявится в том, что амплитуда колебаний будет уменьшаться по закону  $A = A_0 e^{-nt}$ . При этом фазовая траектория (кривая 2) располагается внутри окружности 1 радиуса  $A_0$ , и зона выстоя начнется в точке  $N$ . Этому случаю отвечает график  $\dot{q}(t)$ , приведенный на рис.8.13,а. Однако может оказаться, что  $v_{\min} = v_0 + \dot{q}_{\min} > 0$ , следовательно,  $\dot{q}_{\min} > -v_0$ . Тогда выстоя не будет, и колебания будут затухать по экспоненциальному закону (рис.8.13,б). При этом фазовая траектория примет вид кривой 3 (см. рис.8.12).

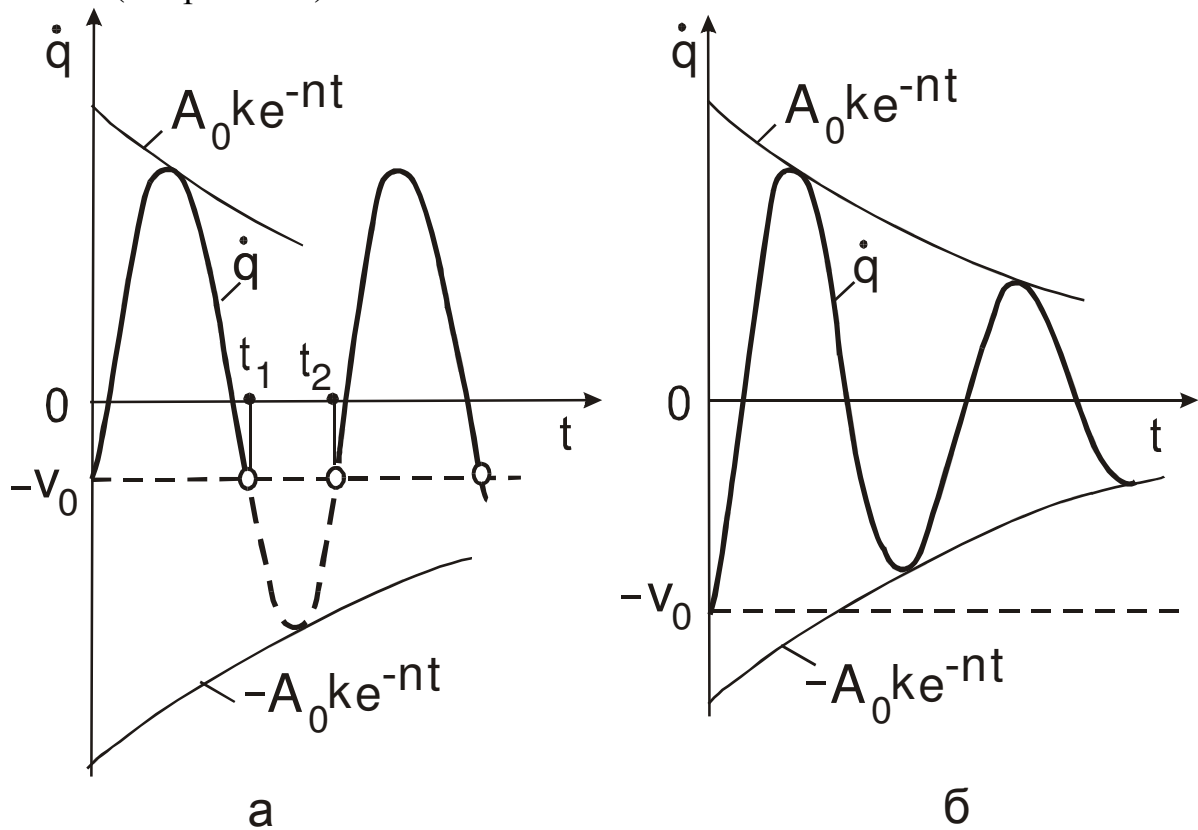


Рис.8.13

Представляет интерес критическое значение  $v_0^*$ , разделяющее эти два случая, что отвечает касанию фазовой траектории прямой  $N_0 N_1$ . Как показывает анализ, влияние линейной диссипации на положение точки касания пренебрежимо мало, и она располагается в окрестности  $N_*$ . При этом

$$A_0 k \exp(-nt_1^*) = v_0^*, \quad (8.41)$$

где  $t_1 = t_1^* = (2\pi - \varphi_0^*)/k_*$  (Звездочкой отмечены значения параметров, отвечающих этому критическому случаю.)

На основании (8.41) и анализа фазового портрета

$$\cos \varphi_0^* = v_0^*/(kA_0) = \exp[-\lambda(1 - \varphi_0^*/2\pi)]. \quad (8.42)$$

Отсюда следует, что

$$\lambda(1 - \varphi_0^*/2\pi) = -\ln(\cos \varphi_0^*). \quad (8.43)$$

Решая это трансцендентное уравнение при  $0,2 \leq \lambda \leq 0,8$ , можно показать, что  $\varphi_0^* \approx [\pi/6 \div \pi/3]$ .

На основании (8.40) и (8.41) окончательно получаем

$$v_0^* = k\Delta F / [c\sqrt{\exp(2\lambda_*) - 1}], \quad (8.44)$$

где  $\lambda_* = \lambda(1 - \varphi_0^*/(2\pi)) \approx [5/6 \div 11/12]\lambda$ .

Принимая во внимание, что  $\Delta F = mg\Delta f$ ,  $c/m = k^2$  ( $\Delta f$  – перепад коэффициентов трения покоя и движения;  $g$  – ускорение свободного падения), формуле (8.44) можно принять вид

$$v_0^* = g\Delta f / [k\sqrt{\exp(2\lambda_*) - 1}]. \quad (8.45)$$

С ростом собственной частоты  $k$  критическое значение скорости  $v_0^*$  убывает.

При  $v_0 < v_0^*$  имеют место фрикционные автоколебания, а при  $v_0 > v_0^*$  они отсутствуют. В предельном случае, когда  $\lambda \rightarrow 0$ , имеем  $v_0^* \rightarrow \infty$ , что отвечает кривой 1 на фазовом портрете. Это означает, что без учета линейного сопротивления автоколебания рассмотренного типа возникают при любой скорости  $v_0$ . Обычно критическая скорость  $v_0^*$  достаточно мала. Пусть, например,  $k = 100 \text{ c}^{-1}$ ,  $\Delta f = 0,05$ ;  $\lambda = 0,2$ . При этом  $\varphi_0^* = 0,584$  рад (см. уравнение (8.43));  $\lambda_* \approx 0,18$  и  $v_0^* = 0,741 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ .

При проектировании металлорежущих станков, приборов и другого оборудования возникающее при релаксационных автоколебаниях превращение равномерного движения в прерывистое (т.е. в движение с остановками и скачками) является весьма нежелательным. Дело в том, что величина скачка  $\Delta s$  в

конечном итоге определяет так называемую точность позиционирования, т.е. реализуемую точность установки исполнительного органа в заданное положение. Для оценки  $\Delta s$  рассмотрим два предельных случая. При скорости  $v_0$ , близкой к критическому значению  $v_0^*$ , имеем  $\varphi_1^* \approx 2\pi - \varphi_0^*$ , где  $\varphi_0^* = \varphi_0(v_0^*)$ .

Тогда (см. выше)

$$\Delta s_* = v_0^*(2\pi - \varphi_0^*)/k + q(t_1) - q_0.$$

Однако  $\Delta q = q(t_1) - q_0$  в этом случае стремится к значению  $\Delta q \approx N_* N_0 = v_0^* k^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0^* = \Delta F / c$ . Отсюда следует

$$\Delta s_* = (v_0^*/k)[2\pi - \operatorname{arctg} k \Delta F / (c v_0^*)] + \Delta F / c. \quad (8.46)$$

Этому скачку отвечает период  $\tau_* = \Delta s_* / v_0^*$ . Интересно, что при переходе скорости  $v_0$  через критическое значение  $v_0^*$  период уменьшается скачком до значения  $\tau = 2\pi/k$ , т.е. на величину  $\Delta \tau_* = (\operatorname{tg} \varphi_0^* - \varphi_0^*)/k$ . При принятых выше исходных данных  $\varphi_0^* = 0,584$  рад;  $\Delta s_* = 0,471$  мм;  $\tau_* = 6,36 \cdot 10^{-2}$  с;  $\Delta \tau_* = 7,68 \cdot 10^{-4}$  с.

Другой предельный случай реализуется при  $v_0/k < \Delta F/c$ ; эта ситуация возникает при малых значениях задающей скорости  $v_0 < g \Delta f / k$ . В этом случае  $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$ . Тогда согласно (8.38)

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \pi/k + 2\Delta F / (c v_0) \approx 2\Delta F / (c v_0); \\ \Delta s &= \pi v_0 / k + 2\Delta F / c \approx 2\Delta F / c. \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

В этом предельном случае четко проявляется еще одна любопытная особенность релаксационных автоколебаний. Как это следует из зависимостей (8.47), период автоколебаний теперь практически определяется временем выстоя массы, когда происходит деформация упругого элемента. Далее масса почти мгновенно «перескакивает» на величину  $\Delta s$ . При этом колебания по существу оказываются разрывными. Если при квазигармонических автоколебаниях (см. п.8.5) равноправную роль играют накопители кинетической и потенциальной энергий (упругие и инерционные элементы), то при релаксационных автоколебаниях доминирует лишь один из двух накопителей энергии. Этот накопитель, роль которого в данном случае играет податливый привод, является своеобразным посредником между внешним источником и колебательной системой. По мере приближения  $v_0$  к критическому значению  $v_0^*$  релаксационная форма автоколебаний становится менее выраженной.

Одним из способов устранения выявленных «скачков» является использование материалов с малыми перепадами коэффициентов трения покоя и движения, таких, например, как наполненные фторопласты (тефлон, фторлон) в паре с закаленной сталью. Разумеется, более радикальным способом является переход к направляющим качения, при которых трение скольжения полностью исключается.

**Квазигармонические автоколебания.** Возбуждение автоколебаний в рассматриваемой модели возможно и при отсутствии остановок. Для их анализа приходится несколько «усовершенствовать» ранее использованную характеристику трения, которую теперь примем в виде так называемой статической характеристики  $F(v)$ , имеющей падающий и нарастающий отрезки кривой (см. рис.8.11,б). Статическая характеристика трения для выбранных пар трущихся элементов определяется экспериментально при последовательной фиксации скорости скольжения, поэтому распространение этой характеристики на динамические процессы при переменных скоростях скольжения, строго говоря, допустимо лишь на уровне оценок и качественного анализа процесса.

Дифференциальное уравнение для рассматриваемого случая отличается от (8.34) лишь тем, что в правой части стоит сила  $-F_1 = -F(v)$ . Разложим функцию  $F(v)$  в ряд Тейлора в окрестности  $v_0$ , по-прежнему полагая  $v = v_0 + \dot{q} > 0$

$$F(v_0 + \dot{q}) \approx h_0 + h_1 \dot{q} + h_2 \dot{q}^2 + h_3 \dot{q}^3, \quad (8.48)$$

где

$$h_0 = F(v_0); \quad h_j = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j F}{\partial v^j}(v_0); \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

При отсутствии остановок можно приближенно считать, что стационарные автоколебания описываются гармонической функцией; при этом решение ищем в виде

$$q = A_0 + A \sin kt, \quad (8.49)$$

Здесь  $A_0$  отвечает статической деформации под действием силы  $-F(v_0) = -h_0$ ;  $k = \sqrt{c/m}$ .

Воспользуемся методом энергетического баланса, для чего перепишем уравнение (8.34) в следующем виде:

$$m\ddot{q} + cq = \Psi(\dot{q}), \quad (8.50)$$

где

$$\Psi(\dot{q}) = -[h_0 + (b + h_1)\dot{q} + h_1\dot{q}^2 + h_3\dot{q}^3]. \quad (8.51)$$

Согласно (5.68), (8.51)

$$\Delta E = - \int_0^{2\pi/k} [h_0 + (b + h_1)\dot{q} + h_2\dot{q}^2 + h_3\dot{q}^3] \dot{q} dt. \quad (8.52)$$

После подстановки (8.49) в (8.52) и интегрирования получаем

$$\Delta E = -(b + h_1)\pi A^2 k - 0,75h_3\pi A^4 k^3. \quad (8.53)$$

Если мы при разложении силы трения в ряд Тейлора ограничимся в (8.48) линейным приближением (т.е. первыми двумя слагаемыми), то в выражении (8.53) сохранится лишь первый член, пропорциональный квадрату амплитуды. Как было установлено в п.8.5, для возникновения автоколебаний необходимо, чтобы данному режиму предшествовала область динамической неустойчивости. Это в данном случае означает, что при  $A < A_*$  (где  $A_*$  – амплитуда автоколебаний)  $\Delta E > 0$ . Следовательно,

$$-(b + h_1) > 0. \quad (8.54)$$

Поскольку  $b > 0$ , это возможно при  $h_1 < -b < 0$ . При этом график  $F(v)$  имеет при малых скоростях вид «падающей характеристики», представленной на рис.8.11,б.

Однако линейное приближение не дает возможности определения амплитуды автоколебаний  $A_*$ , поэтому необходимо учесть нелинейные члены разложения силы трения. При установившихся автоколебаниях  $\Delta E = 0$ , т.е. отводимая энергия равна подводимой. Приравнявая выражение (8.53) нулю, получаем

$$A = 2\sqrt{-(b + h_1)/(3h_3k^2)}. \quad (8.55)$$

Обычно при инженерных расчетах мы располагаем не коэффициентом линейного сопротивления  $b$ , а коэффициентом рассеяния  $\psi$ . Энергетический баланс, связывающий эти два параметра, определяется как  $\pi A^2 k b = 0,5\psi c A^2$ . Отсюда следует  $b = \psi c / (2\pi k)$ .

При  $A < A_*$  имеем  $\Delta E > 0$  и  $\Delta E < 0$  при  $A > A_*$ . Таким образом, при переходе через  $A_*$  функция  $\Delta E$  меняет знак с плюса на минус и имеет вид, показанный на рис.8.7,а, что свидетельствует об устойчивости этого режима.

Напомним, что этот результат получен в предположении отсутствия остановок, когда  $\dot{q}_{\max} = A_*k < v_0$ ; в противном случае произойдет переход в режим релаксационных автоколебаний (см. выше).

Согласно формуле (8.55) наряду с рассмотренным случаем действительное значение  $A_*$  может быть получено также и при  $b + h_1 > 0$  и  $h_3 < 0$ . При этом характеристика трения  $F(v)$  отображается выпуклой кривой. Легко убедиться в том, что этот режим является неустойчивым. Тем не менее он представляет определенный интерес, так как в этом случае при  $A < A_*$  колебания затухают ( $\Delta E < 0$ ), а при  $A > A_*$  ( $\Delta E > 0$ ) амплитуда растет, причем при достижении задающей скорости  $\dot{q}_{\max} = Ak = v_0$  снова возникают релаксационные автоколебания с остановками.

Приведенные выше результаты можно было бы также получить и с помощью метода гармонической линеаризации (см. п.8.3) на базе дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + 2n(A)\dot{q} + k^2(A)q = -F(v_0) = \text{const}. \quad (8.56)$$

При этом оказывается, что  $k^2 = c/m = \text{const}$  и  $2n(A) = -\Delta E / (\pi A^2 km)$ .

При  $n(A) > 0$  колебания затухают; при  $n(A) < 0$  происходит раскачка. Уравнение, определяющее амплитуду автоколебаний  $A_*$ , имеет вид

$$n(A_*) = 0, \quad (8.57)$$

а условие устойчивости этого режима

$$\frac{dn}{dA}(A_*) > 0. \quad (8.58)$$

В заключение отметим, что на основании современных представлений сила трения зависит от динамических факторов, среди которых важнейшим является скорость тангенциального нагружения фрикционного контакта. Поэтому, строго говоря, сила трения формируется в колебательной системе непосредственно происходящими в ней динамическими процессами.

## РАЗДЕЛ II

### ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

#### ГЛАВА 9. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ МАШИН

##### 9.1. Учет нелинейных диссипативных сил при моногармонических колебаниях

**Предварительные замечания.** Как уже отмечалось в п.2.4, при колебаниях упругих систем происходит рассеяние энергии в сочленениях деталей машин, в материале упругих элементов, а также в окружающую среду, т.е. происходит переход механической энергии в другие виды энергии. Потери механической энергии вызываются силами неупругого сопротивления, называемыми диссипативными силами.

Роль диссипативных сил при формировании колебательных процессов с частотами, близкими к собственным, чрезвычайно велика. В частности, от уровня диссипации зависят амплитуды резонансных колебаний, условия возбуждения параметрических, субгармонических колебаний и автоколебаний.

Для систем с одной степенью свободы сила сопротивления, возникающая при колебаниях, может быть описана следующим образом:

$$R = -|R(q, \dot{q})| \operatorname{sign} \dot{q}, \quad (9.1)$$

где  $q$  – обобщенная координата, характеризующая колебательный процесс.

В одних случаях модуль силы сопротивления не зависит от обобщенной координаты  $q$ . Так, в частности, при так называемом вязком сопротивлении, возникающем при малых виброскоростях во вязкой среде (жидкости или газе),  $R = -b\dot{q}$ . При больших виброскоростях имеет место квадратичная зависимость силы сопротивления от скорости или еще более высокий порядок степени этой зависимости.

В других случаях, характерных для задач динамики машин, модуль силы трения обычно зависит от обобщенной координаты и практически не зависит от виброскорости. При этом  $R = -|R(q)| \operatorname{sign} \dot{q}$ ; в подобном случае силу сопротивления называют позиционной. Если  $|R| = P = \operatorname{const}$ , имеет место сила сухого (или кулонова) трения. Различают также позиционно-вязкое трение, при котором  $R = -f(q)\dot{q}$ .

Следует отметить, что разделение упругодиссипативной силы на упругую и диссипативную составляющие является, строго говоря, условным, а зачастую вообще физически не осуществимым, поэтому при инженерных расчетах речь может идти только об эффективных приближенных подходах, позволяющих

оценить влияние диссипации на колебательные процессы. При этом мы обычно располагаем лишь ограниченной исходной информацией в форме некоторых интегральных характеристик, таких как коэффициент рассеяния  $\psi$  или логарифмический декремент  $\lambda$ , которые получены экспериментально при моногармонических (одночастотных) режимах.

**Эквивалентная линеаризация диссипативных сил в колебательной системе с одной степенью свободы.** Рассмотрим дифференциальное уравнение, отвечающее колебаниям системы с одной степенью свободы

$$m\ddot{q} + cq = F(t) - |R(q, \dot{q})| \operatorname{sign} \dot{q}, \quad (9.2)$$

где  $m, c$  – приведенная масса и приведенный коэффициент жесткости;  $F(t)$  – вынуждающая сила.

Строго говоря, дифференциальное уравнение (9.2) является нелинейным из-за нелинейности диссипативной силы. Однако, как правило, диссипативная сила пренебрежимо мало влияет на частоту свободных колебаний, а лишь определяет амплитудный уровень при резонансе. Исходя из подобного ограниченного проявления нелинейной диссипативной силы, рассматриваемую колебательную систему будем называть *квазилинейной*. Для нелинейной силы  $-R(q, \dot{q})$  может быть найдена энергетически эквивалентная линейная сила  $R_3 = -b\dot{q}$ . Если  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ , то при установившихся вынужденных колебаниях  $q = A \sin(\omega t - \gamma)$ . При этом рассеянная за один период энергия (см. п.5.13)

$$\Delta E_- = A \int_0^{2\pi} |R(A \sin \varphi, \omega A \cos \varphi) \cos \varphi| d\varphi = \psi c A^2 / 2.$$

С другой стороны,  $\Delta E_- = \pi b A^2 \omega$ . Отсюда

$$b = \Delta E_- / (\pi A^2 \omega) = \psi c / (2\pi \omega). \quad (9.3)$$

Этот результат совпадает с соответствующим коэффициентом, полученным методом гармонической линеаризации (см. п.8.3), что представляется вполне естественным, если учесть, что именно при одночастотных гармонических колебаниях была получена исходная информация о коэффициенте рассеяния  $\psi$ . В определенном смысле с этой точки зрения коэффициент  $\psi$  можно рассматривать как результат «гармонической линеаризации», проведенной экспериментально. Обычно при использовании формулы (9.3) частоту вынуждающей силы  $\omega$  можно заменить собственной частотой  $k$ , так как именно в окрестности этой частоты диссипативные силы играют существенную роль.

Значение  $\Delta E_-$  отвечает площади петли гистерезиса. Таким образом, из (9.3) следует, что *диссипативные свойства при моногармоническом режиме определяются площадью петли гистерезиса и не зависят от формы этой петли*. Кроме того, очевидно, что *коэффициент рассеяния  $\psi$  не зависит от амплитуды лишь в том случае, если величина  $\Delta E_-$  пропорциональна квад-*

**рату амплитуды.** Это, например, имеет место при линейной силе сопротивления или силе сопротивления, пропорциональной первой степени амплитуды.

Анализ экспериментальных материалов свидетельствует о том, что коэффициент рассеяния  $\psi$ , а следовательно, и логарифмический декремент  $\lambda$ , обычно слабо зависят от частоты колебаний. Тогда согласно (9.3) коэффициент  $b$  оказывается обратно пропорциональным частоте колебаний. Заметим, что при таком характере диссипации, нередко называемой **частотно независимой**, одной из самых характерных ошибок, допускаемых при варьировании параметрами колебательной системы, является сохранение постоянного значения принятого коэффициента  $b$ . О возможных последствиях подобной ошибки, в частности, свидетельствует тот факт, что при  $b = \text{const}$  уменьшение коэффициента жесткости  $c$  при позиционном трении будто бы может привести даже к переходу в апериодический режим, так как собственная частота равна  $k_1 = \sqrt{c/m - b^2/(2m)^2}$ . Однако на самом деле в этом случае при  $\psi = \text{const}$  имеем  $k_1 = \sqrt{c(1 - \delta^2)/m}$ , где  $\delta \approx \psi/(4\pi)$ , а следовательно, исключена возможность возникновения апериодических режимов за счет уменьшения коэффициента жесткости  $c$ .

Формула (9.3) свидетельствует о том, что при одночастотных колебаниях «неупругое» сопротивление  $R = -b\dot{q}$  пропорционально восстанавливающей силе, но сдвинуто относительно последней по фазе на  $\pi/2$ . На этом основано предложение Е.С. Сорокина [15\*] воспользоваться комплексной формой записи диссипативной силы

$$R = -i \cdot 2\delta(cq), \quad (9.4)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, соответствующая повороту вектора восстанавливающей силы на  $\pi/2$  (именно этот угол соответствует при гармонических колебаниях сдвигу фазы между  $q$  и  $\dot{q}$ ). Таким образом, с учетом (9.4) при представлении упругодиссипативной силы в комплексной форме дифференциальное уравнение (9.2) может быть записано как

$$m\ddot{q} + \tilde{c}q = F_0 e^{i\omega t}, \quad (9.5)$$

где правая часть уравнения отвечает гармонической вынуждающей силе с частотой  $\omega$ ;  $\tilde{c} = c(1 + i \cdot 2\delta)$  – комплексный коэффициент жесткости.

При параллельном или последовательном соединении упругодиссипативных элементов справедливы правила приведения комплексных коэффициентов жесткости, аналогичные изложенным в п.п.2.3, 2.4.

Частное решение уравнения (9.5), отвечающее вынужденным колебаниям, будем искать в форме

$$\tilde{q} = \tilde{A} e^{i\omega t}. \quad (9.6)$$

Здесь  $\tilde{A} = |A|e^{i\alpha}$  – комплексная амплитуда вынужденных колебаний;  $\alpha$  – фаза колебаний.

После подстановки (9.6) в (9.5) имеем

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{c} \frac{1}{(1 - \omega^2/k^2 + 2\delta i)}. \quad (9.7)$$

Легко убедиться, что модуль  $|A|$  совпадает с формулой (5.18). Впрочем, при использовании современных стандартных компьютерных программ отсутствует необходимость в процедуре аналитического определения  $|A|$ .

**Эквивалентная линеаризация диссипативных сил в колебательной системе со многими степенями свободы.** Изложенный выше прием учета нелинейных сил может быть распространен на системы как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами. Как и раньше, будем считать динамическую модель квазилинейной в том смысле, что нелинейные диссипативные силы пренебрежимо мало влияют на собственные частоты и формы колебаний.

Систему дифференциальных уравнений модели с  $N$  степенями свободы представим в виде

$$\mathbf{a}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (9.8)$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$  – квадратные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов;  $\mathbf{q}$  – вектор-матрица (столбец) обобщенных координат;  $\mathbf{Q}$  – вектор-матрица неконсервативных сил.

В векторе обобщенных сил выделим диссипативную составляющую  $\mathbf{R}(q, \dot{q})$ , которую представим как

$$\mathbf{R} = -\mathbf{b}\dot{\mathbf{q}}, \quad (9.9)$$

где  $\mathbf{b}$  – квадратная матрица эквивалентных диссипативных коэффициентов;  $\dot{\mathbf{q}}$  – вектор обобщенных скоростей.

Задача состоит в том, чтобы найти достоверные (с позиций инженерного расчета колебаний в машинах) значения диссипативных коэффициентов  $b_{jv}$ , определение которых базировалось бы на доступной информации о коэффициентах рассеяния (или логарифмических декрементов) отдельных упругодиссипативных элементов системы.

При чисто вязком трении, когда сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости, для описания диссипативных свойств обычно используется диссипативная функция Релея  $\Phi_R$ , характеризующая интенсивность изменения полной энергии системы  $E$

$$\Phi_R = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^H \sum_{v=1}^H b_{jv} \dot{q}_j \dot{q}_v. \quad (9.10)$$

Однако, при частотно-независимой диссипации коэффициенты  $b_{jr}$  нам не известны, а поскольку ставится задача замены нелинейной системы эквивалентной (в определенном смысле) линейной, речь может идти лишь о приближенном подходе, основанном на правдоподобных допущениях. При этом целесообразно рассмотреть несколько ступеней идеализации диссипативных сил.

Введем в рассмотрение нормальные (главные) координаты  $\theta_r$  (см. п.4.9)

$$q_j = \sum_{r=1}^H \beta_{jr} \theta_r. \quad (9.11)$$

Здесь  $\beta_{jr}$  – коэффициенты формы, определенные без учета диссипативных сил.

Тогда исходная система дифференциальных уравнений (9.8) может быть записана как

$$\mathbf{a}^* \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{c}^* \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}^*, \quad (9.12)$$

где  $\mathbf{a}^* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{c}^* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\beta}$  – диагональные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов после перехода к нормальным координатам;  $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Q}^*$  – вектор-матрицы нормальных координат и неконсервативных обобщенных сил;  $\boldsymbol{\beta}$  – матрица коэффициентов формы.

Отметим, что при данном приеме составления уравнения (9.12) в завуалированном виде использовано допущение об отсутствии диссипативных связей между различными формами колебаний.

Далее введем в каждое из уравнений системы (9.12) эквивалентную диссипативную силу  $R_r = -b_r^* \dot{\theta}_r$ . Тогда

$$a_r^* \ddot{\theta}_r + b_r^* \dot{\theta}_r + c_r^* \theta_r = F_r^*(t) \quad (r=1, \dots, H), \quad (9.13)$$

где  $F_r^* = \sum_{j=1}^H Q_j \beta_{jr}$  ( $\mathbf{F}^* = \boldsymbol{\beta} \mathbf{Q}$ ).

Коэффициент рассеяния  $\psi_r^*$ , соответствующий форме  $r$ , определяется как

$$\psi_r^* = \sum_{j=1}^H \psi_j c_j \beta_{jr}^2 / \sum_{j=1}^H c_j \beta_{jr}^2. \quad (9.14)$$

Отсюда при учете (9.3)

$$b_r^* = \psi_r c_r / (2\pi k_r), \quad (9.15)$$

где  $k_r = \sqrt{c_r / a_r}$ .

Изложенный выше способ при использовании численных методов решения системы дифференциальных уравнений может вызвать некоторые неудобства, так как в качестве промежуточной процедуры требует перехода к нормальным координатам. Однако, сохранив идею данного способа, эту процедуру можно исключить. Пусть в исходной системе эквивалентные диссипативные силы описываются следующим образом:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{b}\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{b}\beta\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (9.16)$$

где  $\mathbf{b}$  – квадратная матрица неизвестных диссипативных коэффициентов.

С другой стороны,

$$\mathbf{R}^* = \beta^T \mathbf{R} = -\mathbf{b}^* \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (9.17)$$

где  $\mathbf{R}^*$  – вектор-матрица диссипативных сил после перехода к нормальным координатам;  $\beta^T$  – транспонированная матрица коэффициентов формы;  $\mathbf{b}^* = \text{diag}[b_1^*, \dots, b_H^*]$ .

На основании (9.16) и (9.17) получаем

$$\mathbf{b} = (\beta^T)^{-1} \mathbf{b}^* (\beta)^{-1}. \quad (9.18)$$

Квадратная матрица  $\mathbf{b}$  в общем случае не является диагональной. Итак, при использовании (9.18) исходное дифференциальное уравнение (9.8) после выделения из неконсервативных обобщенных сил диссипативной составляющей принимает вид

$$\mathbf{a}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t). \quad (9.19)$$

Процедура определения матрицы  $\mathbf{b}$  существенно упрощается, если в дополнении к принятым допущениям, предположить, что в режиме моногармонических колебаний находится лишь одна из форм колебаний. Такая ситуация, в частности, возникает при возбуждении резонансных колебаний, когда резонирующая форма доминирует над остальными. Можно показать [9\*], что в этом случае  $b_{jj} \approx \psi_j c_j / (2\pi k_j)$ ;  $b_{j\nu} = 0$  ( $j \neq \nu$ ). Этот результат практически совпадает с формулой (5.74), полученной в п.5.13 на основании условий энергетического баланса.

## 9.2. Учет нелинейных диссипативных сил при неоднородных колебаниях

**Предварительные замечания.** При динамических расчетах механизмов и машин нередко приходится сталкиваться с колебаниями, имеющими четко выраженный многочастотный характер. В частности, подобная ситуация наблюдается в цикловых механизмах при вынужденных колебаниях и одновременном возбуждении интенсивных свободных сопровождающих колебаний, при резонансе на определенной гармонике вынуждающей силы и достаточно интенсивном возбуждении колебаний с другими частотами, при совместном параметрическом и силовом возбуждении и т.п. В подобных случаях роль диссипативных сил проявляется лишь тогда, когда частота исследуемого режима близка к частоте свободных колебаний, в то время как уровень колебаний на «чужих» частотах практически от диссипации не зависит. В п.9.1 при эквивалентной линеаризации диссипативных сил мы использовали предположение об

одночастотном (моногоармоническом) характере колебательного режима. Ранее это не приводило к противоречиям, так как именно в таком режиме были получены экспериментальные значения коэффициента рассеяния  $\psi$  или логарифмического декремента  $\lambda$ . Естественно, что при неодночастотных режимах это соответствие нарушается, причем при определенных условиях – существенным образом. Отсюда следует, что исходная информация о диссипативных свойствах системы нуждается в коррективах.

По характеру влияния диссипативных сил колебательные режимы можно разделить на две группы. К первой группе отнесем режимы, амплитудный уровень которых зависит от диссипации, такие как свободные колебания и вынужденные резонансные колебания. Ко второй – режимы, существование которых возможно только при преодолении некоторого энергетического барьера, определяемого диссипацией, например, параметрический и субгармонический резонансы, а также автоколебания.

**Свободные колебания.** Рассмотрим простую модель, состоящую из упругого элемента с коэффициентом жесткости  $c$  и ползуна массой  $m$ . Ползун перемещается по направляющим с абсолютной скоростью  $v(t) = \dot{x}_0(t) + \dot{q}(t)$ , где  $\dot{x}_0(t), \dot{q}(t)$  – скорость переносного движения и относительная скорость, возникающая при свободных колебаниях (см. рис.8.10 при  $\psi = 0$ ). При действии силы кулонова трения  $R = P = -|P|\text{sign}(\dot{x}_0 + \dot{q})$  дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q} + cq = -|P|\text{sign}(\dot{x}_0 + \dot{q}) - m\ddot{x}_0. \quad (9.20)$$

При  $\dot{x}_0 = v_0 = \text{const}$  колебания в общем случае могут быть описаны как

$$q = A_0 + A(t)\sin(kt + \alpha),$$

где  $A(t)$  – медленно меняющаяся амплитуда,  $k = \sqrt{c/m}$  – собственная частота,  $\alpha$  – начальная фаза.

Отведенная энергия  $\Delta E_-$  за период  $T = 2\pi/k$  равна

$$\Delta E_- = \oint |R|\text{sign}(\dot{x}_0 + \dot{q})dq = |R|\int_0^T \dot{q}\text{sign}(\dot{x}_0 + \dot{q})dt. \quad (9.21)$$

При  $v_0 = 0$  имеем  $\Delta E_- = 4|R|A$ . При этом амплитуда возбуждаемых при ненулевых начальных условиях свободных колебаний убывает по линейному закону, эквивалентная линейная сила сопротивления равна  $R = -b\dot{q}$ , где  $b = 4|R|/(\pi Ak)$ , а коэффициент рассеяния равен  $\psi = 8|R|/(cA)$ . Этот результат нередко ошибочно распространяется на случай  $v_0 \neq 0$ . Пусть, например,  $v_0 > 0$ , причем  $v_0 = \text{const}$ . Тогда согласно (9.21) на отрезке времени, отвечающем  $\dot{q} < v_0$ , работа, затраченная на преодоление силы трения, равна нулю. Следовательно, если исключить влияние диссипативных сил иной природы, демпфи-

рующими свойствами система обладает только при  $\dot{q} > v_0$ . На рис.9.1,а приведены полученные компьютерным моделированием графики  $q(t)$  при  $v_0 = 0$  (кривая 1) и при  $v_0 \neq 0$  (кривая 2).

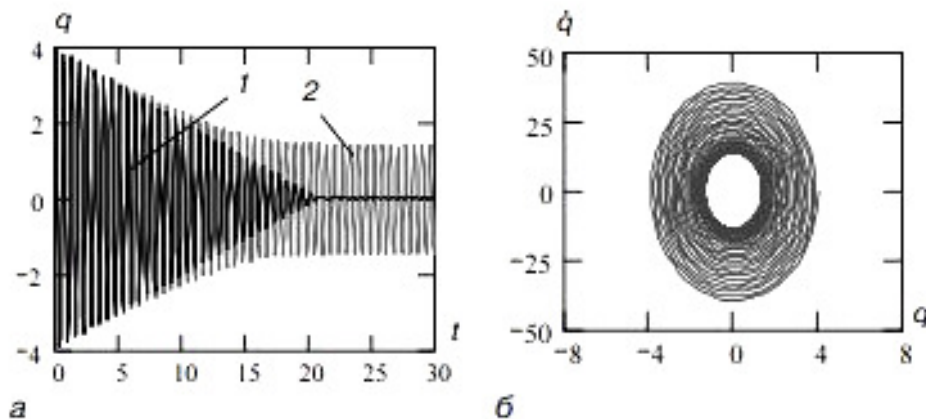


Рис. 9.1

Легко убедиться в том, что, начиная с определенного момента времени, в последнем случае затухание колебаний прекращается. Этому эффекту отвечает незаполненная фазовыми траекториями внутренняя область на фазовом портрете (рис.9.1,б).

Рассмотрим еще один показательный пример, поясняющий роль кулонова трения как демпфирующего фактора при колебаниях исполнительных органов цикловых механизмов. Пусть  $x_0(t) = \Pi(\omega t)$ , где  $\Pi(\omega t) = 1 - \cos \omega t$  – функция положения выходного звена,  $\omega$  – угловая скорость входного звена. При выбранном гармоническом законе ускорений (без выстоев) источником возбуждения свободных сопровождающих колебаний в данном примере являются скачки силы трения в момент смены знака абсолютной скорости выходного звена. Если при учете диссипации пренебречь влиянием переносного движения, то скорость  $v$  и ускорение  $w$  выходного звена имеют вид кривых, показанных на рис.9.2,а. Аналогичные кривые, полученные при определении энергетических потерь с учетом переносного движения на основании (9.21), отображены на рис.9.2,б.

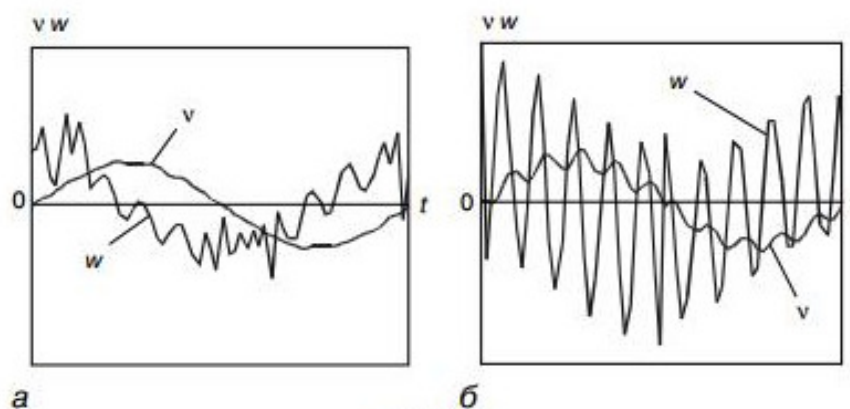


Рис. 9.2

Таким образом, при дополнительном движении системы имеет место существенное снижение уровня диссипации по сравнению с моногармоническим. Учет этого эффекта в инженерных расчетах особенно важен также при исследовании виброударных режимов, возникающих при переключке в зазорах. В аналитической форме указанный эффект описан в ряде работ автора, в которых предложены уточненные значения диссипативных факторов [3], [2\*],[9\*]

$$\psi = \psi_0 \Phi(z), \quad \lambda = \lambda_0 \Phi(z), \quad P = P_0 \Phi(z). \quad (9.22)$$

Здесь индексом 0 отмечены параметры диссипации (коэффициент рассеяния, логарифмический декремент, сила кулонова трения), соответствующие моногармоническим колебаниям;  $\Phi(z)$  – коэффициент, зависящий от  $z$  – отношения виброскорости исследуемого режима к скорости дополнительного движения, а также от формы петли гистерезиса. Функции  $\Phi(z)$  для распространенных типов петель гистерезиса конкретизированы в монографии [9\*]. Однако, как показывает анализ, форма петли гистерезиса относительно мало влияет на функцию  $\Phi(z)$ , что позволяет для типовых случаев воспользоваться аппроксимирующей зависимостью (рис.9.3)

$$\Phi(z) = z(0,4 + 0,5z)/(1 + 0,5z^2). \quad (9.23)$$

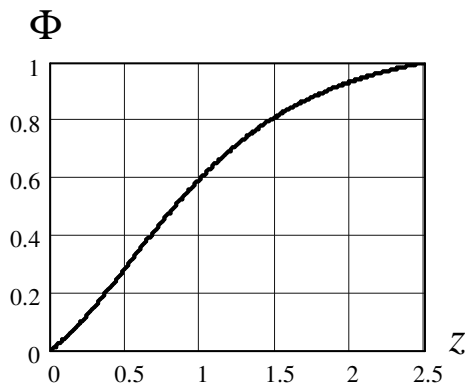


Рис.9.3

При  $z \rightarrow 0$  имеем  $\Phi(z) \rightarrow 0$ , при  $z \rightarrow \infty$   $\Phi(z) \rightarrow 1$ . (Последний результат можно использовать уже при  $z > 2$ .) Согласно (9.23) при малых значениях  $z$  функция  $\Phi(z) \approx 0,4z$ , т.е. пропорциональна амплитуде колебаний. Тогда, если при моногармоническом режиме коэффициент рассеяния  $\psi_0$  обратно пропорционален амплитуде, то  $\psi = \psi_0 \Phi \approx \text{const}$ . Такая ситуация, в частности, возникает при кулоновом трении, когда  $\psi_0 \approx 8P_0/(cA)$ . Поскольку постоянное

значение коэффициента рассеяния свойственно линейной силе сопротивления, в подобных случаях имеет место так называемая **вибрационная линеаризация сил трения**, при которой возникают специфические эффекты, имеющие много технических приложений. Попутно заметим, что обычно этот динамический эффект связывают только с высокочастотными составляющими возбуждения, в то время как определяющую роль играет соотношение скоростей  $z$  исследуемого и «чужого» режимов, не зависимо от частотного состава последнего. В частности, как было показано выше, этот эффект наблюдается даже при постоянной скорости дополнительного движения (см. рис.9.1).

Физические предпосылки анализируемого динамического эффекта связаны с возникновением так называемых частных петель гистерезиса, располо-

женных внутри петли, соответствующей колебаниям с основной частотой. При условии, что эти петли замкнуты, их суммарная площадь пропорциональна работе сил сопротивления, осуществляемой за счет «чужого» движения. При этом эффективная площадь петли гистерезиса для исследуемого режима уменьшается, что проявляется в снижении приведенных диссипативных характеристик. Подчеркнем, что для появления частных петель и реализации исследуемого эффекта скорость обязательно должна менять свой знак на промежуточных участках контура основной петли.

Математическое описание петли гистерезиса при неоднородных колебаниях представляет достаточно сложную и трудоемкую задачу даже при статической постановке задачи и мало приспособлено к решению практических инженерных задач динамики машин. Впрочем, как уже было отмечено выше, нас интересует не сам контур петли гистерезиса, а энергетический эквивалент, определяемый ее эффективной площадью.

Как уже отмечалось, источником информации о диссипативных свойствах системы обычно является логарифмический декремент  $\lambda_0$  или коэффициент рассеяния  $\psi_0$ , полученные при одночастотных колебаниях. С учетом вышеизложенного уточненная позиционная диссипативная сила  $f$ , отнесенная к единице массы, может быть на основании (9.21) представлена как

$$f_1(q, \dot{q}) = -|f_0|u(|\dot{q}| - |v|)\text{sign}\dot{q}, \quad (9.24)$$

где  $v$  - скорость, связанная с дополнительным движением («чужие» гармоники, переносное движение и т.п.);  $u$  - единичная функция ( $u = 1$  при  $|\dot{q}| > |v|$  и  $u = 0$  при  $|\dot{q}| < |v|$ ),  $f_0 = R(q)/m$ .

При решении задачи аналитическим методом функция  $u(|\dot{q}| - |v|)$  усредняется и трансформируется в функцию  $\Phi(z)$  (см. выше). Таким образом, оба подхода по существу совпадают и различаются лишь процедурой усреднения на периоде  $\tau = 2\pi/k$ . Если исходная информация о диссипативных силах задана логарифмическим декрементом при одночастотных колебаниях  $\lambda_0$ , то

$$f_1(q, \dot{q}) = -\lambda_0 \pi^{-1} k \dot{q} u(|\dot{q}| - |v|). \quad (9.25)$$

На рис.9.4 представлены скорректированные согласно (9.25) петли гистерезиса для двух случаев – при исходном эллиптическом контуре петли и при рессорной характеристике, когда модуль силы сопротивления пропорционален  $q$ . На графиках четко видно уменьшение исходной площади каждой петли.

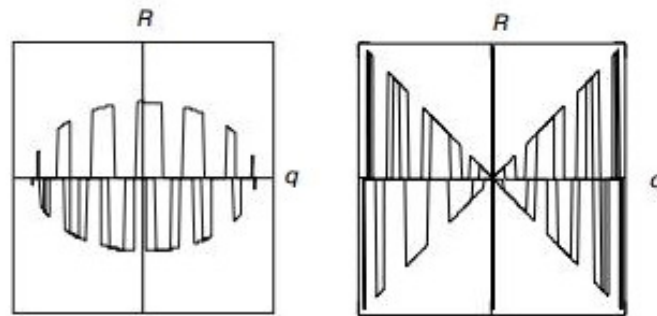


Рис. 9.4

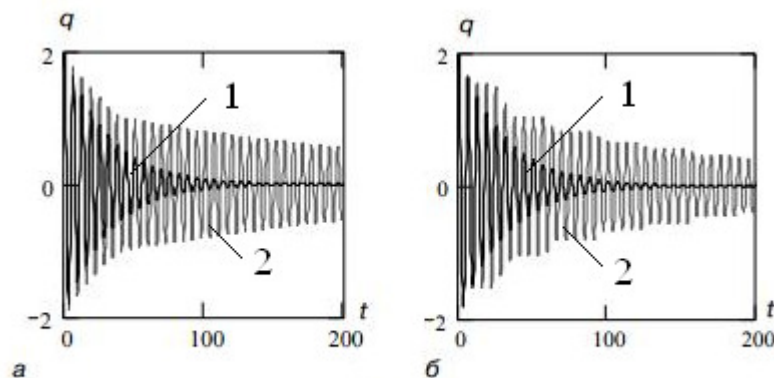


Рис. 9.5

На рис.9.5 представлены графики затухающих колебаний при эллиптической петле гистерезиса и  $v = v_* \sin \omega t$ , полученные компьютерным моделированием при учете (9.25), причем в первом случае  $\omega/k = 10$  (рис.9.5,а), а во втором –  $\omega/k = 0,1$  (рис.9.5,б). Здесь, как и на рис.9.1, кривые 1 отвечают отсутствию дополнительных колебаний ( $v \equiv 0$ ), а кривые 2 –  $v_* \neq 0$ .

Как следует из графиков, эффект снижения диссипации наблюдается как при высокочастотном, так и при низкочастотном дополнительном возбуждении.

**Резонансные колебания.** Рассмотрим вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы, описываемой дифференциальным уравнением

$$m\ddot{q} + cq = -|R(q)|\text{sign}\dot{q} + F_1 \sin \omega_1 t + F_2 \sin \omega_2 t. \quad (9.26)$$

Пусть частота  $\omega_1$  равна собственной частоте  $k = \sqrt{c/m}$ , а частота  $\omega_2$  существенно от нее отличается. Ниже частоту  $\omega_1$  и вынужденные колебания с этой частотой  $q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t - \gamma_1)$  назовем основными, а  $q_2 = A_2 \sin(\omega_2 t - \gamma_2)$  – дополнительными. Если бы диссипативная сила была бы линейной, как это, например, имеет место при вязком трении, задача решалась бы чрезвычайно просто с использованием принципа суперпозиции (см.п.5.8). Однако в данном случае из-за нелинейной природы диссипативной силы этот принцип не может быть использован.

После разделения движения на основное и дополнительное получаем следующие два модифицированные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + f(q_1, \dot{q}_1) + k^2 q_1 &= w_1 \sin \omega_1 t; \\ \ddot{q}_2 + k^2 q_2 &= -\omega_2^2 a_0 \sin \omega_2 t, \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

где  $w_1 = F_1/m$ ,  $f = -f_1$  (см.(9.25)),  $a_0$  – амплитуда кинематического возбуждения.

Поскольку частота  $\omega_2$  существенно отличается от резонансной, амплитуда вынужденных колебаний  $A_2$  на этой частоте практически не зависит от диссипации. При этом  $A_2 \approx \omega_2^2 a_0 / |k^2 - \omega_2^2|$ , а резонансная амплитуда  $A_1$ , найденная аналитическим способом, определяется как

$$A_1 = \pi A_* / (\lambda_0 \Phi(z)), \quad (9.28)$$

где  $A_* = F_1/c$ ,  $z = A_1 \omega_1 / (A_2 \omega_2)$ .

Так как правая часть равенства также зависит от искомой величины  $A_1$ , выражение (9.28) является уравнением, которое приводится к следующему виду:

$$\chi = \Phi^{-1}(\chi z_0). \quad (9.29)$$

Здесь  $\chi = A_1/A_{10}$  – коэффициент возрастания резонансной амплитуды;  $z_0 = z(A_{10})$ , где  $A_{10} = \pi A_* / \lambda_0$  – известное значение резонансной амплитуды без учета корректирующего влияния дополнительных «чужих» колебаний.

На рис.9.6 приведен график функции  $\chi(z_0)$ , полученный на основании (9.23) и (9.29). Не сужая общности задачи, рассмотрим следующий эталонный пример.

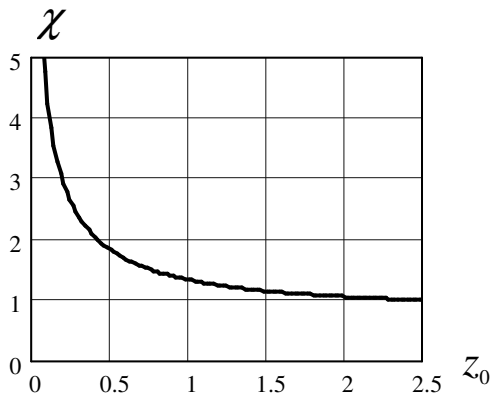
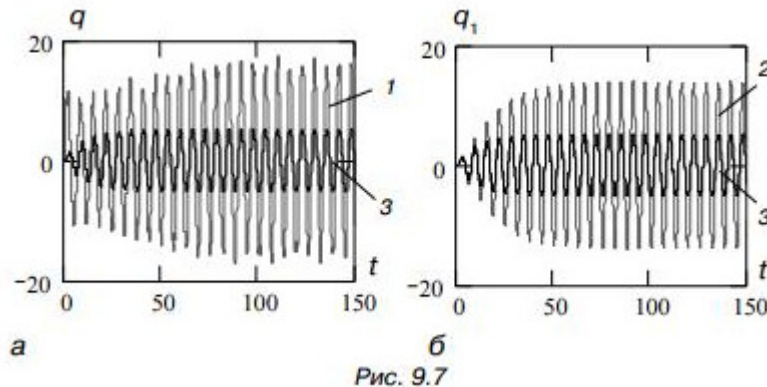


Рис.9.6

Пусть  $m = 1\text{кг}$ ,  $c = 1\text{Н/м}$ ,  $\omega_1 = 1\text{с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 5,3\text{с}^{-1}$ ,  $F_1 = 1\text{Н}$ ,  $F_2 = -m\omega_2^2 a_0$ ,  $\lambda_0 = 0,5$ ,  $|f| = \zeta|q|$  при  $\zeta = 0,15$  (рессорная характеристика). На рис.9.7 приведены кривые, полученные компьютерным моделированием. При этом  $q(t)$  соответствует исходному дифференциальному уравнению (рис.9.7,а, кривая 1), а  $q_1(t)$  – модифицированному уравнению

(рис.9.7,б кривая 2). Кроме того, на обоих графиках приведены кривые 3, отображающие вынужденные колебания с резонансной частотой при формальном использовании принципа суперпозиции. (Здесь, как и выше, этому случаю на графиках соответствуют кривые более темного оттенка).

Анализ приведенных графиков свидетельствует о том, что, во-первых, игнорирование нелинейной природы диссипативных сил может привести к существенной ошибке при оценке резонансной амплитуды. Так, в нашем примере  $A_1^0 = |q_1^0|_{\max} = 6,21$ , в то время как  $|q|_{\max} \approx 14,3$ . Во-вторых, имеет место удовлетворительное совпадение последнего результата с решением модифицированного дифференциального уравнения  $A_1 = |q_1|_{\max} = 13,9$ . Некоторые расхождения



результатов в основном связаны с тем, что в функции  $q(t)$  отражен бигармонический характер возбуждения, а в функции  $q_1(t)$  – только колебания с резонансной частотой. Хорошее совпадение этих результатов, проверенное при варьировании параметров в широких пределах как при  $\omega_2 > \omega_1$ , так и при  $\omega_2 < \omega_1$ , подкрепляется также результатами аналитического решения на основании уравнения (4.29), причем расхождения обычно не превышают (10 ÷ 15)%.

**Уточненные условия динамической устойчивости при главном параметрическом резонансе.** Пусть исходное дифференциальное уравнение, описывающее колебания при одновременном воздействии параметрического и силового возбуждения, имеет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = -[f(q)|\text{sign}\dot{q} - \varepsilon k^2 q \sin \Omega t] + w \sin \omega t, \quad (9.30)$$

где  $\varepsilon, \Omega$  – глубина пульсации и частота параметрического возбуждения.

Примем, что  $\omega \gg k$ ,  $\Omega = 2k$ ; последнее условие отвечает зоне главного параметрического резонанса. Используя изложенный выше метод, представим соответствующее модифицированное дифференциальное уравнение в форме

$$\ddot{q}_1 + f(q_1, \dot{q}_1, v) + k^2(1 - \varepsilon \sin \Omega t)q_1 = 0. \quad (9.31)$$

Таким образом, в уравнении (5.2) опущен член, отвечающий вынуждающей силе, при соответствующей коррекции диссипативной составляющей. Напомним, что при аналитическом решении задачи  $f = \pi^{-1} k \lambda_0(A) \Phi(z)$ . В данном

случае  $z = Ak/(A_1\omega)$ , где  $A, A_1$  – амплитуды колебаний с частотами  $k$  (параметрический резонанс) и  $\omega$  (вынужденные колебания).

Условия динамической устойчивости в зоне главного параметрического резонанса (7.28) приводятся к виду

$$\eta_0 > \eta_* = \Phi^{-1}(z), \quad (9.32)$$

где  $\eta_0 = 2\lambda_0/(\pi\varepsilon)$ .

Рассмотрим два случая.

*Случай 1* ( $w=0$ ). В этом случае вынужденные колебания отсутствуют, поэтому  $z \rightarrow \infty$  и  $\Phi \rightarrow 1$ , а следовательно, условие (5.3), (9.32) имеет вид  $\eta_0 > 1$ .

*Случай 2* ( $w \neq 0$ ). Поскольку теперь  $\Phi(z) < 1$ , область динамической неустойчивости расширяется. Поэтому условия, обеспечивающие динамическую устойчивость при отсутствии высокочастотного возбуждения, теперь могут оказаться нарушенными.

Для более наглядной иллюстрации поведения системы при совместном параметрическом и силовом возбуждении воспользуемся плоскостью параметров  $z - \eta_0$  или  $A - \eta_0$  (рис.9.8).

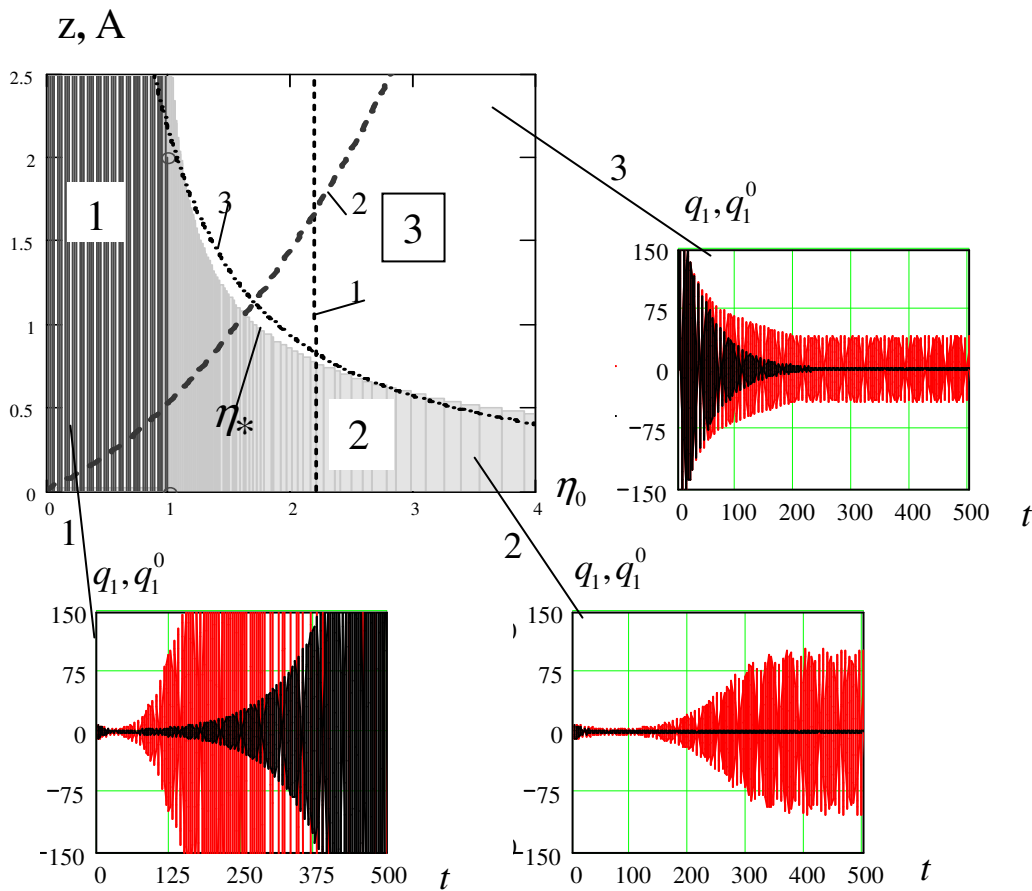


Рис.9.8

В области 1 ( $\eta_0 < 1$ ) система всегда динамически неустойчива, не зависимо от воздействия дополнительного возбуждения, которое в данном случае проявляется лишь в росте интенсивности нарастания амплитуды. Это наглядно видно на совмещенном графике  $q_1(t)$  и  $q_1^0(t)$  (верхний индекс 0 отвечает случаю 1). В области 2 система устойчива при  $w = 0$  и  $\eta_0 > 1$  (случай 1) и неустойчива при  $w \neq 0$  и  $\eta_0 < \eta_*$ . Наконец, в области 3 ( $\eta_0 > \eta_*$ ) условия динамической устойчивости соблюдаются не зависимо от дополнительного возмущения.

На плоскости параметров штриховыми линиями показаны три характерных случая изменения логарифмического декремента в зависимости от амплитуды. Если  $\lambda_0 = \text{const}$  (прямая 1), то в области 2 амплитуда растет, а в области 3 – убывает. Следовательно, амплитуда установившегося режима соответствует границе асимптотической устойчивости  $\eta_*$ . На графиках  $q_1(t)$  и  $q_1^0(t)$  видно, что при  $w \neq 0$  колебания выходят на установившийся режим, а при  $w = 0$  колебания быстро затухают. Аналогичный характер поведения системы имеет место при возрастающей функции  $\lambda_0(A)$  (кривая 2).

При убывающем характере изменения  $\lambda_0(A)$  возможны два случая. Если кривая 3 дважды пересекает кривую  $\eta_*$ , то верхняя точка пересечения соответствует неустойчивому режиму, а нижняя – устойчивому. При отсутствии нижней точки пересечения, как это, например, имеет место при кулоновом трении, колебания при  $\eta_0 > \eta_*$  полностью затухают ( $A \rightarrow 0$ ).

Аналогичным образом при дополнительном возбуждении корректируется коэффициент рассеяния в условии существования субгармонического резонанса (8.32), а также при анализе автоколебаний. В частности, при определении критической скорости возбуждения фрикционных автоколебаний теперь следует принять во внимание уменьшение эффективных значений перепада сил трения покоя и движения и логарифмического декремента в соответствии с зависимостями (9.22). При этом зависимость (8.44), принимает следующий вид:

$$v_0^{**} = v_0^* K(\Phi),$$

где  $K(\Phi) = \sqrt{\Phi(1 - \psi_0 \Phi) / (1 - \psi_0)}$ ,  $\psi_0$  – коэффициент рассеяния при отсутствии дополнительных колебаний, т.е. при  $\Phi(z) = 1$ .

При  $v_0 < v_0^{**}$  возможно возбуждение фрикционных автоколебаний. Корректирующий множитель  $K(\Phi)$  достигает максимального значения  $K_* = K(\Phi_*)$ , где  $\Phi_* = 1/(2\psi_0)$ . Поскольку  $\Phi(z) \leq 1$ , то при  $\psi_0 < 0,5$  функция  $K(\Phi)$  является возрастающей. При  $\psi_0 > 0,5$  и  $\Phi < \Phi_*$  функция  $K(\Phi)$  возрастает, а при  $\Phi > \Phi_*$  – убывает.

## ГЛАВА 10. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ПРИВОДОВ РАЗВЕТВЛЕННОЙ СТРУКТУРЫ

### 10.1. Модифицированные матрицы перехода

Ряд задач, рассмотренных в этой главе, требует использования так называемых матриц перехода, позволяющих осуществить динамический расчет сложных механических систем в форме определенной последовательности алгебраических операций, соответствующих переходу от одного участка или блока системы к другому.

Матрицы перехода получили большое распространение при анализе гармонических колебаний линейных колебательных систем с постоянными параметрами. С помощью аппарата матриц перехода удается определять собственные частоты и формы колебаний, а также амплитуды вынужденных колебаний, формально минуя процедуру составления систем дифференциальных уравнений и расчета коэффициентов этих уравнений. Кроме того, несомненным достоинством матриц перехода является их приспособленность к специфике расчетов на ЭВМ.

В ряде работ [2],[3],[4\*] аппарат матриц перехода был развит применительно к задачам динамики механизмов и машин, образующих колебательные системы с переменными параметрами. Такие матрицы перехода названы *модифицированными*. В дальнейшем для краткости этот термин будет использован лишь в тех случаях, когда возникает необходимость подчеркнуть именно эту особенность. Возможность такого «нетрадиционного» применения аппарата матриц перехода обусловлена тем, что при дополнительных условиях (7.15), реализуемых в методе условного осциллятора, обобщенные координаты и обобщенные ускорения описываются одинаковыми гармоническими функциями.

Аппарат модифицированных матриц перехода особенно удобен для приводов машин, образующих колебательные системы с медленно меняющимися параметрами. Такие системы характерны для технологических машин легкой, текстильной, полиграфической, пищевой и ряда других отраслей промышленности, в которых возникают большие динамические нагрузки и повышенный уровень колебаний, вызванных цикловыми механизмами.

Далее мы ограничимся рассмотрением крутильных и продольных колебаний элементов привода. В этих случаях мы имеем дело с так называемыми односвязными системами. *Связность системы показывает число возможных перемещений любого сечения или, что то же самое, – число реакций, заменяющих при рассечении системы действие одной ее части на другую.*

**Матрицы перехода элементов динамической модели и правило знаков.** Если исключить из рассмотрения влияние диссипативных сил, то гармо-

нические колебания различных сечений системы происходят в одной фазе или в противоположных фазах. Тогда *колебание в любом сечении может быть охарактеризовано его амплитудой  $a$ , которая принимается положительной, если его фаза совпадает с фазой колебания элемента, принятого за исходное, и отрицательной, если колебания происходят в противофазе, т.е. отличаются на  $\pi$* . Аналогичный вывод справедлив и относительно амплитуд сил  $Q$ . Однако во избежании ошибок при определении реакций в сечениях следует договориться о знаке сил (или моментов), действующих на «левую» и «правую» части системы. Примем следующее правило знаков: *реактивную силу или момент на «выходе» элемента  $j$  будем считать положительными, если их направление совпадает с положительным направлением отсчета координат (рис.10.1,а – сечение). На «входе» (сечение  $j-1$ ) – правило знаков обратное.*

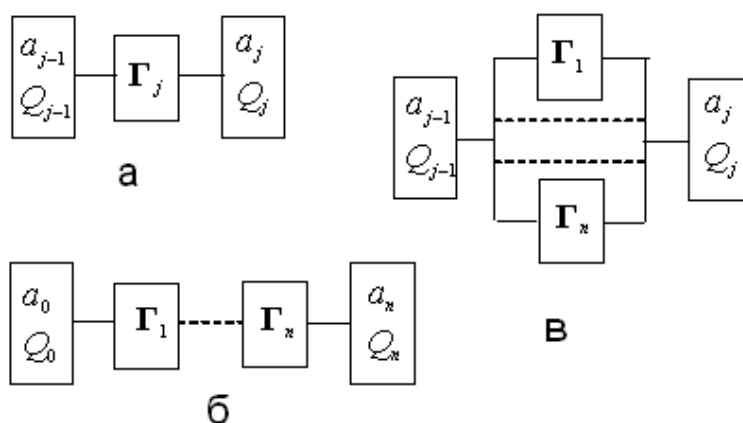


Рис.10.1

Из теории линейных систем известно, что числа  $a_{j-1}$  и  $Q_{j-1}$  («вход») и числа  $a_j$  и  $Q_j$  («выход») при гармонических колебаниях с частотой  $\omega$  связаны между собой линейными зависимостями следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} a_j &= A_j a_{j-1} + B_j Q_{j-1}; \\ Q_j &= C_j a_{j-1} + D_j Q_{j-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Здесь  $A_j, B_j, C_j, D_j$  – размерные коэффициенты, зависящие в общем случае от параметров системы (масс, моментов инерции, коэффициентов жесткости) и от частоты  $\omega$  гармонических колебаний.

При этом справедлива матричная форма соотношений (10.1)

$$\begin{pmatrix} a_j \\ Q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ Q_{j-1} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Квадратную матрицу  $\Gamma_j$ , образованную элементами  $A_j, B_j, C_j, D_j$ , называют *матрицей перехода*. Отношение  $Q_j/a_j$  называется *динамической жесткостью*, а обратная величина  $a_j/Q_j$  – *динамической податливостью*.

Отметим, что несмотря на условность, принятую при выборе знаков, знак динамической жесткости не зависит от выбора направлений отсчета, а лишь от сдвига фаз между колебаниями и силами. Другими словами, динамическая жесткость положительна, если на рассматриваемой частоте фаза силы совпадает с фазой перемещения, а в случае противофазы – отрицательна.

Следует подчеркнуть, что при использовании матриц перехода в задачах динамики машин в качестве обобщенных координат принимаются абсолютные динамические ошибки, равные отклонениям абсолютной координаты в рассматриваемой точке или сечении от идеального значения при программном движении (т.е. при абсолютно жестких звеньях).

Рассмотрим матрицы перехода ряда простейших элементов.

1. Упругий элемент с коэффициентом жесткости  $c_j$ .

В этом случае амплитуды перемещения на его концах отличаются на величину амплитуды деформации, а амплитуды сил согласно третьему закону Ньютона равны между собой:

$$\left. \begin{aligned} a_j &= a_{j-1} + Q_{j-1}/c_j; \\ Q_j &= Q_{j-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Таким образом, согласно (10.2) и (10.3) элементы матрицы перехода определяются как  $A_j = 1$ ,  $B_j = c_j^{-1}$ ,  $C_j = 0$ ,  $D_j = 1$ .

2. Инерционный элемент  $J_j$  (или  $m_j$ ).

Аналогичным образом получаем  $A_j = 1$ ,  $B_j = 0$ ,  $C_j = -J_j\omega^2$ ,  $D_j = 1$ .

3. Преобразование координат, реализуемое в идеальном механизме.

При учете линеаризации функции положения в окрестности программного движения (см. п.7.1) для кинематического аналога механизма, соответствующего преобразованию при «переходе» через механизм, имеем  $a_j = a_{j-1}\Pi'$ ,  $Q_j = Q_{j-1}(\Pi')^{-1}$ . Отсюда  $A_j = \Pi'_j$ ;  $B_j = 0$ ;  $C_j = 0$ ;  $D_j = (\Pi'_j)^{-1}$ , где  $\Pi'(\varphi)$  – абсолютное значение первой геометрической передаточной функции при программном движении.

Обратим внимание на то, что функцию  $\Pi'$  следует брать по абсолютной величине, так как изменение знака при амплитудных преобразованиях с помощью матриц перехода свидетельствует о колебаниях в противофазах, в то время как в кинематических расчетах это изменение отвечает направлению движения по отношению к выбранной системе отсчета. (Для упрощения записи знак абсолютной величины всюду опущен). В частном случае при зубчатых передачах функция  $\Pi'$  трансформируется в постоянное передаточное отношение.

Обратим внимание на следующее свойство матриц перехода

$$\det \Gamma_j = A_j D_j - C_j B_j \equiv 1. \quad (10.4)$$

Здесь  $\det \Gamma_j$  – определитель матрицы  $\Gamma_j$ .

**Последовательное соединение блоков модели.** Пусть динамическая модель образована последовательным соединением блоков (рис.10.1,б). Для подобных моделей иногда используется термин *цепная система*. Последовательной подстановкой (10.2) получаем

$$\begin{pmatrix} a_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Таким образом, *матрицей перехода колебательной цепи, состоящей из последовательного соединения блоков, служит произведение в обратном порядке матриц перехода этих блоков:*

$$\Gamma = \prod_{j=n}^1 \Gamma_j. \quad (10.6)$$

Подчеркнем, что обратный порядок сомножителей по сравнению с последовательностью самих блоков в колебательной цепи является обязательным, так как матричное произведение не обладает свойством коммутативности.

В табл. 10.1 наряду с описанными выше простейшими элементами матриц перехода приведены также элементы этих матриц для типовых случаев последовательного соединения блоков.

**Параллельное соединение блоков модели (рис.10.1,в)** В этом случае для каждого из элементов (или целых блоков последовательного соединенных элементов) справедливо следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} a_{j\nu} \\ Q_{j\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{j\nu} & B_{j\nu} \\ C_{j\nu} & D_{j\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j-1,\nu} \\ Q_{j-1,\nu} \end{pmatrix} \quad (\nu = \overline{1, n}). \quad (10.7)$$

Здесь  $\nu$  – текущий номер блока,  $n$  – число блоков.

Таблица 10.1

## Элементы матрицы перехода для типовых соединений

Соедине- ние	A	B	C	D
$c$	1	$c^{-1}$	0	1
$J$	1	0	$-Jp^2$	1
$\Pi$	$\Pi'$	0	0	$1/\Pi'$
$c-J-\Pi$	$\Pi'$	$\Pi'c^{-1}$	$-Jp^2/\Pi'$	$(1-Jp^2c^{-1})/\Pi'$
$c-\Pi-J$	$\Pi'$	$\Pi'c^{-1}$	$-Jp^2/\Pi'$	$-Jp^2\Pi'c^{-1}+1/\Pi'$
$J-c-\Pi$	$\Pi'(1-Jp^2c^{-1})$	$\Pi'c^{-1}$	$-Jp^2/\Pi'$	$1/\Pi'$
$J-\Pi-c$	$\Pi'-Jp^2/(c\Pi')$	$(c\Pi')^{-1}$	$-Jp^2/\Pi'$	$1/\Pi'$
$\Pi-J-c$	$\Pi'(1-Jp^2c^{-1})$	$(c\Pi')^{-1}$	$-Jp^2\Pi'$	$1/\Pi'$
$\Pi-c-J$	$\Pi'$	$(c\Pi')^{-1}$	$-Jp^2\Pi'$	$(1-Jp^2c^{-1})/\Pi'$

Поскольку при параллельном соединении координаты на входе и выходе для всех блоков соответственно равны, а следовательно, не зависят от  $\nu$ , имеем  $a_{j\nu} = a_j$ ,  $a_{j-1,\nu} = a_{j-1}$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} a_j &= A_{j\nu}a_{j-1} + B_{j\nu}Q_{j-1,\nu}; \\ Q_{j\nu} &= C_{j\nu}a_{j-1} + D_{j\nu}Q_{j-1,\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Суммарные нагрузки  $Q_{j-1}$  и  $Q_j$  согласно (10.8) могут быть представлены как

$$\left. \begin{aligned} Q_{j-1} &= \sum_{\nu=1}^n Q_{j-1,\nu} = -a_{j-1}\gamma_1 + a_j\gamma_2; \\ Q_j &= \sum_{\nu=1}^n Q_{j\nu} = -a_{j-1}\gamma_2 + a_j\gamma_3, \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

где  $\gamma_1 = \sum_{\nu=1}^n A_{j\nu}/B_{j\nu}$ ;  $\gamma_2 = \sum_{\nu=1}^n B_{j\nu}^{-1}$ ;  $\gamma_3 = \sum_{\nu=1}^n D_{j\nu}/B_{j\nu}$ .

Матрица перехода  $\Gamma_j$  для всей совокупности параллельно соединенных блоков должна удовлетворять матричному равенству (10.2). При этом на основании (10.8) и (10.9) элементы матрицы  $\Gamma_j$  определяются зависимостями

$$A_j = \gamma_1/\gamma_2; \quad B_j = 1/\gamma_2; \quad C_j = (\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2)/\gamma_2; \quad D_j = \gamma_3/\gamma_2.$$

Легко убедиться в том, что полученные значения  $A_j, B_j, C_j, D_j$  удовлетворяют тождеству (10.4). В частном случае при параллельном соединении упругих элементов с коэффициентами жесткости  $c_{jv}$  имеем  $A_{jv} = 1$ ,  $B_{jv} = c_{jv}^{-1}$ ,  $C_{jv} = 0$ ,  $D_{jv} = 1$ . При этом  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = c_j$ , где  $c_j = \sum_{v=1}^n c_{jv}$ . Отсюда  $A_j = 1$ ,  $B_j = c_j^{-1}$ ,  $C_j = 0$ ,  $D_j = 1$ .

Таким образом, как и следовало ожидать, коэффициент жесткости при параллельном соединении элементов равен сумме коэффициентов жесткости этих элементов (см. формулу (2.7))

## 10.2. Определение частот свободных колебаний и нестационарных коэффициентов форм

Для обозначения частот свободных колебаний далее для краткости будет использован термин «собственные», хотя, строго говоря, этот термин отвечает лишь системе с постоянными параметрами.

Методику определения спектра «собственных» частот поясним на примере крутильных колебаний привода, состоящего из главного вала и  $n$  цикловых механизмов (рис.10.2). Эта модель отличается от модели, рассмотренной в п.5.7, учетом упругих характеристик главного вала и более сложной структурой кинематических ответвлений, соответствующих цикловым механизмам.

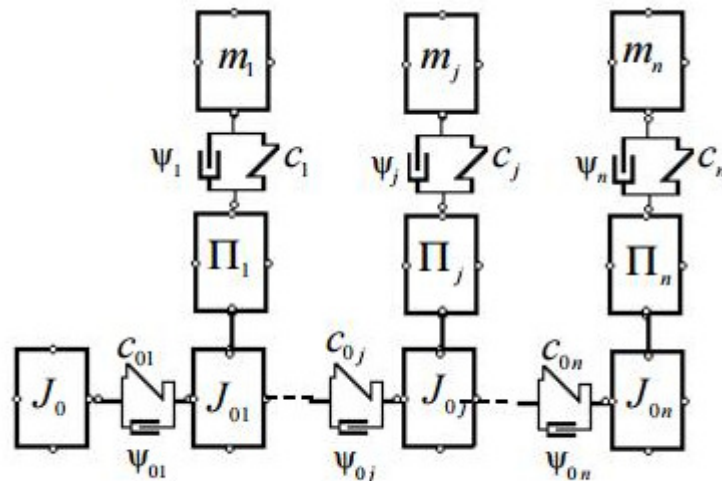


Рис. 10.2

Пусть входное сечение вала ( $j = 0$ ) вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ , что в первом приближении близко к реальной ситуации. Это допущение адекватно предположению об относительно большом моменте инерции на «входе» вала, что позволяет при частотном анализе считать входное сечение заделкой (см. п.4.8).

Разобьем колебательную систему на  $n$  блоков, каждый из которых состоит из участка главного вала с коэффициентом жесткости  $c_{0j}$ , сосредоточенного момента инерции  $J_{0j}$  и механизма, образующего цепочку элементов  $\Pi_j - c_j - m_j$  (или  $\Pi_j - c_j - J_j$ ).

Трансформация амплитудных значений колебаний и нагрузок при переходе через блок  $j$  соответствует следующей матричной зависимости:

$$\begin{pmatrix} a_{0j} \\ Q_{0j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 J_{0j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{0j}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,j-1} \\ Q_{0,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_j \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

Первое слагаемое в выражении (10.10) соответствует последовательному соединению элементов главного вала  $c_{0j} - J_{0j}$ , а второе – дополнительной реакции  $Q_j$  со стороны механизма  $j$ . Для определения этой реакции запишем

$$\begin{pmatrix} a_j^+ \\ Q_j^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j^- \\ Q_j^- \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

Здесь индекс «плюс» отвечает амплитудным значениям на «выходе» механизма, а «минус» – на «входе»;  $A_j, B_j, C_j, D_j$  соответствуют соединению  $\Pi - c - m$  (см. табл.10.1 при замене  $m$  на  $J$ ).

В нашем случае  $Q_j^+ = 0$ ,  $a_j^- = a_{0j}$ ,  $Q_j^- = Q_j$ . Тогда на основании (10.11) имеем

$$\left. \begin{aligned} a_j^+ &= A_j a_{0j} + B_j Q_j; \\ 0 &= C_j a_{0j} + D_j Q_j. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Отсюда

$$Q_j = -\frac{C_j}{D_j} a_{0j} = R_j a_{0j}, \quad (10.13)$$

где  $R_j = -C_j / D_j$  – динамическая жесткость механизма  $j$  (см. п.10.1).

Для рассматриваемой модели  $R_j = -m p^2 \Pi^2 / (1 - m p^2 / c)$ .

Иногда выходное звено связано с корпусом посредством упругого элемента. Такая ситуация, в частности, имеет место при пружинном замыкании толкателя кулачкового механизма, а также при использовании пружинных динамических разгрузателей (см. п.6.6). В подобных случаях в первом уравнении

системы (10.12) следует принять  $a_j^+ = 0$ ; левая часть второго уравнения равна неизвестной реакции со стороны корпуса  $Q_j^+$ . При этом аналогичным образом получаем  $R_j = -A_j / B_j$ .

На основании (10.10), (10.13) после элементарных преобразований имеем

$$\begin{pmatrix} a_{0j} \\ Q_{0j} \end{pmatrix} = \Gamma_{0j} \begin{pmatrix} a_{0,j-1} \\ Q_{0,j-1} \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

где  $\Gamma_{0j}$  – матрица перехода блока  $j$ , элементы которой определяются следующим образом:

$$A_{0j} = 1; B_{0j} = c_{0j}^{-1}; C_{0j} = R_j - J_{0j}p^2; D_{0j} = 1 + (R_j - J_{0j}p^2)/c_{0j}. \quad (10.15)$$

Заметим, что  $R_j - J_{0j}p^2 = R_j^*$  соответствует динамической жесткости механизма  $j$ , если к его элементам добавить момент инерции входного звена  $J_{0j}$ .

Приведем одну интерпретацию полученного результата. На основании формул, приведенных в табл.10.1, соединению  $c - J$  отвечает  $A = 1$ ,  $B = c^{-1}$ ,  $C = -Jp^2$ ,  $D = 1 - Jp^2/c$  (для применения этих формул для соответствующих соединений в данном случае следует принять  $\Pi' = 1$ ). Если сопоставить эти формулы с  $A_{0j}$ ,  $B_{0j}$ ,  $C_{0j}$ ,  $D_{0j}$ , легко убедиться в том, что они совпадают при  $J = J_{0j}^* = J_{0j} - R_j / p^2$ . Таким образом,  $J_{0j}^*$  приобретает смысл приведенного к главному валу момента инерции. Итак, для учета кинематического ответвления достаточно скорректировать указанным образом момент инерции входного звена.

Используя для рассматриваемой модели полученную выше зависимость, определяющую динамическую жесткость  $R_j$ , имеем

$$J_{0j}^* = J_{0j} + \frac{m_j \Pi_j'^2}{1 - p^2 / k_j^2}, \quad (10.16)$$

где  $k_j = \sqrt{c_j / m_j}$ .

В частном случае при  $\Pi_j' = 0$  и  $m_j \rightarrow 0$ , как и следовало ожидать,  $J_{0j}^* = J_{0j}$ , а при абсолютно «жестком» механизме ( $c_j \rightarrow \infty$ )  $J_{0j}^* = J_{0j} + m_j \Pi_j'^2$ , что соответствует известному из курса теории механизмов и машин приведенному к входному звену моменту инерции, полученному на основании условий баланса кинетической энергии.

Итак, мы трансформировали исходную разветвленную систему в последовательное соединение блоков, для которой справедливо следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_{0n} \\ Q_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ Q_{00} \end{pmatrix}, \quad (10.17)$$

где  $A, B, C, D$  – элементы матрицы

$$\Gamma = \prod_{j=n}^1 \Gamma_{0j}. \quad (10.18)$$

При определении граничных условий возможны следующие случаи.

Случай 1. «Вход» заземлен, «выход» заземлен ( $a_{00} = 0, a_{0n} = 0$ ). Поскольку  $a_{0n} = Aa_{00} + BQ_{00} = BQ_{00}$ , имеем  $B(p) = 0$ . Этот результат служит частотным уравнением.

Случай 2. «Вход» заземлен, «выход» свободен ( $a_{00} = 0, Q_{0n} = 0$ ). Согласно (10.17)  $Q_{0n} = Ca_{00} + DQ_{00} = DQ_{00} = 0$  при  $Q_{00} \neq 0$ . Отсюда следует  $D(p) = 0$ .

Случай 3. «Вход» свободен, «выход» свободен ( $Q_{00} = 0, Q_{0n} = 0$ ). Аналогичным образом получаем  $C(p) = 0$ .

Случай 4. «Вход» свободен, «выход» заземлен ( $Q_{00} = 0, a_{0n} = 0$ ). При этом  $A(p) = 0$ .

Таким образом, согласно (10.18) для расчета «собственных» частот необходимо перемножить в обратном порядке квадратные матрицы отдельных блоков и обратить в нуль соответствующий элемент полученной матрицы  $\Gamma_0$ . Однако есть более простой способ определения элементов этой матрицы. На основании (10.17) запишем

$$\left. \begin{aligned} a_{0n} &= A(p)a_{00} + B(p)Q_{00}; \\ Q_{0n} &= C(p)a_{00} + D(p)Q_{00}. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Для случая 1, принимая в первом уравнении  $Q_{00} = 1$ , получаем  $a_{0n} = B(p)$ . Для определения  $D(p)$  (случай 2) достаточно во втором уравнении системы (10.19) задаться граничным условием  $Q_{00} = 1$ . Поскольку  $a_{00} = 0$ , тогда имеем  $Q_{0n} = D(p)$ . Для случая 3 следует воспользоваться вторым уравнением при  $a_{00} = 1$ ; при этом  $Q_{0n} = C(p)$ . Наконец, для случая 4 из первого уравнения при  $a_{00} = 1$  следует  $a_{0n} = A(p)$ . При изложенном способе мы практически оперируем лишь матрицами-столбцами (вектор-матрицами) граничных условий.

На первый взгляд кажется, что приведенный способ упрощения расчета при современном уровне вычислительной техники не представляет особого интереса. Однако дело тут не в экономии расчетного времени. Как показывает практика инженерных расчетов, при перемножении матриц перехода длинных колебательных цепей элементы этих матриц быстро достигают громадных значений, что сказывается на точности при поиске корней. Этот недостаток устраняется при использовании изложенного ранее способа преобразования векторов.

Для определения частотного спектра достаточно найти точки пересечения графика соответствующей функции ( $B(p)$  для случая 1 и  $D(p)$  для случая 2) с осью абсцисс, либо воспользоваться известными компьютерными способами нахождения корней.

Подчеркнем, что для приводов с цикловыми механизмами в отличие от механизмов с постоянными передаточными отношениями «собственные» частоты не являются константами, а изменяются в зависимости от угла поворота главного вала  $\varphi_0 = \omega_0 t$ . Это связано с переменностью первых передаточных функций  $\Pi'_j(\varphi_0)$ , входящих в соответствующие матрицы перехода. Тогда при медленном изменении параметров свободные колебания без учета сил сопротивления описываются следующим образом (см. p.7.4):

$$q_i = \sum_{r=1}^H a_{ir}^0 \sqrt{\frac{p_r(0)}{p_r(t)}} \cos \left[ \int_0^t p_r(u) du + \alpha_r \right], \quad (10.20)$$

где  $H$  – число степеней свободы;  $r$  – номер частоты;  $i$  – номер элемента или сечения;  $a_{ir}^0$  и  $\alpha_r$  – определяются из начальных условий.

Совокупность  $a_{ir}(t) = a_{ir}^0 \sqrt{p_r(0)/p_r(t)}$  при фиксированной «собственной» частоте  $p_r$  образует форму колебаний, которая в нашем случае является нестационарной, поскольку также зависит от  $\varphi_0 = \omega_0 t$ . Для определения нестационарных коэффициентов формы следует задаться в каком-либо сечении системы единичной амплитудой или единичной силой. Если, например, для случая 1 потребовать  $a_{0n}(p_r) = 1$ , то из первого уравнения системы (10.18) следует  $Q_{00}(p_r) = 1/B(p_r)$ . (Способ определения  $B(p)$  изложен выше).

Для частоты  $p_r$  положительное значение  $a_{ir}(t)$  указывает на совпадение фаз, а отрицательное – на противофазу колебаний элемента  $i$  по сравнению с колебаниями элемента с единичным коэффициентом формы.

Ранее при анализе модели, показанной на рис.10.2, мы привели аналитические зависимости для элементов матриц перехода. Это было сделано для иллюстрации физического содержания каждого из компонентов, что позволяет объяснить некоторые наблюдаемые эффекты. Разумеется, расчет на ЭВМ не

требует представления элементов матриц блоков в форме аналитических выражений: достаточно задать вид соединения (жесткость, массу или момент инерции, кинематический аналог механизма) и соответствующую матрицу перехода, после чего все необходимые преобразования осуществляются в процессе счета.

### 10.3. Вынужденные колебания

Снова обратимся к модели привода, показанной на рис.10.2. Пусть к выходным звеньям механизмов приложены периодические вынуждающие силы, представленные в форме ряда Фурье

$$F_j(t) = F_{j0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (F_{j\nu}^c \cos(\nu \Omega t) + F_{j\nu}^s \sin(\nu \Omega t)). \quad (10.21)$$

Здесь, как и выше,  $j$  отвечает номеру механизма.

Происхождение вынуждающих сил может быть силовым и кинематическим. В первом случае они обычно связаны с выполняемой технологической операцией, а во втором – с силами инерции звеньев механизма при переносном движении. В частности, для данной модели эти силы инерции определяются как  $-m_j \omega_0^2 \Pi_j''(\omega_0 t)$ . Обычно значение  $\Omega$  совпадает с угловой скоростью главного вала ( $\Omega \approx \omega_0$ ).

Как и раньше, на этом этапе исключим из рассмотрения резонансные режимы, что позволяет не учитывать влияние диссипативных сил. Кроме того, ограничимся случаем медленного изменения  $\Pi_j'$ ; это, однако, не свидетельствует о медленном изменении вынуждающих сил, поскольку существенные по величине гармоники этих сил могут иметь место при  $\nu \Omega \gg \omega_0$ .

Легко убедиться в том, что в подобных случаях при переходе через кинематический аналог механизма происходит лишь амплитудная трансформация силы в соответствии с зависимостью  $F_{j\nu}^{c,s} \Pi_j'$ , а ее частота практически остается неизменной [3]. В этих случаях приведенная выше зависимость содержит произведения  $\sin(\omega_0 t) \cos(\nu \omega_0 t)$  или  $\sin(\omega_0 t) \sin(\nu \omega_0 t)$ , которые при  $\nu \gg 1$  по существу описывают гармонические колебания с частотой  $\nu \omega_0$  при амплитудной модуляции с частотой  $\omega_0$ , напоминающей режим биений (см. п.5.2).

Попутно отметим еще одну особенность систем с переменными параметрами, которая заключается в следующем: постоянная составляющая силы  $F_{j0}$  в механизме трансформируется в переменный момент  $F_{j0} \Pi_j'$ , приложенный к главному валу, а гармоника  $\omega_0$  ( $\nu=1$ ) в гармонику  $2\omega_0$  вынуждающего момента. Так например, в кривошипно-ползунном механизме основная гармоника

первой передаточной функции равна  $l_1 \sin \omega_0 t$ , где  $l_1$  – длина кривошипа, а сила инерции в переносном движении  $-m\omega^2 l_1 \cos \omega t$ . При этом момент от этой силы на главном валу равен  $0,5m\omega^2 l_1^2 \sin 2\omega_0 t$ .

Нередко «собственные» частоты на исследуемом диапазоне, представляющем практический интерес, близки к константам. При этом переменность первой передаточной функции механизма проявляется только на амплитудах и частотах приведенных к главному валу вынуждающих сил, как это было показано выше (уточнения см. [3])

Вынужденные колебания с частотой  $\Omega_v = v\omega_0$  описываются как

$$\left. \begin{aligned} q_{0j} &= a_{0j}^c \cos \omega t + a_{0j}^s \sin \omega t; \\ q_j &= a_j^c \cos \omega t + a_j^s \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

Здесь, как и раньше, индекс  $0j$  отвечает главному валу, а индекс  $j$  – соответствующему механизму. (В формулах (10.22) и ниже для упрощения записи принято  $\Omega_v = \omega$ .)

При расчете вынужденных колебаний, как и при свободных колебаниях, происходит преобразование гармонических функций, поэтому сохраняется вид всех приведенных выше матриц перехода при замене частоты  $p$  на частоту  $\omega$ .

Сначала определим амплитуду реактивного момента  $Q_j^c$ , действующего на главный вал, от силы  $F_j^c \cos \omega t$ , приложенной к выходному механизму  $j$ . Воспользуемся системой уравнений (10.12), которая теперь примет вид

$$\left. \begin{aligned} a_j^c &= A_j(\omega)a_{0j}^c + B_j(\omega)Q_j^c; \\ -F_j^c &= C_j(\omega)a_{0j}^c + D_j(\omega)Q_j^c. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

При учете (10.4), (10.13) на основании (10.23) получаем

$$Q_j^c = R_j a_{0j}^c - F_j^c / D_j. \quad (10.24)$$

Знак минус при  $F_j^c$  соответствует приложению силы на «выходе» (см. выше).

При этом переход через блок  $j$  теперь соответствует следующим рекуррентным зависимостям:

$$\left. \begin{aligned} a_{0j}^c &= A_{oj}(\omega)a_{0,j-1}^c + B_{0j}(\omega)Q_{0,j-1}^c; \\ Q_{0j}^c &= C_{0j}(\omega)a_{0,j-1}^c + D_{0j}(\omega)Q_{0,j-1}^c - F_j^c / D_j(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Поскольку  $F_j^c$  входит в эти уравнения линейно, справедлив принцип суперпозиции, согласно которому представим амплитудные значения на «выходе» как

$$\left. \begin{aligned} a_{0n}^c &= S_{11}(\omega)a_{00}^c + S_{12}(\omega)Q_{00}^c + S_{13}(\omega, F_1^c, \dots, F_n^c); \\ Q_{0n}^c &= S_{21}(\omega)a_{00}^c + S_{22}(\omega)Q_{00}^c + S_{23}(\omega, F_1^c, \dots, F_n^c). \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

Для рассматриваемой модели  $a_{00}^c = 0$  (заделка),  $Q_{0n}^c = 0$  (свободный конец). Неизвестные коэффициенты  $S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}$  определяются посредством нескольких простых расчетов.

Счет 1.  $Q_{00}^c \equiv 1, F_1^c = \dots = F_n^c \equiv 0$ . Тогда  $(a_{0n}^c)_1 = S_{12}; (Q_{0n}^c)_1 = S_{22}$ . (Здесь и ниже индекс при скобке указывает на номер счета.)

Счет 2.  $Q_{00}^c \equiv 0$ . Теперь  $(a_{0n}^c)_2 = S_{13}$  и  $(Q_{0n}^c)_2 = S_{23}$ . Отсюда, используя условие  $Q_{0n}^c = 0$ , получаем неизвестное граничное условие  $Q_{00}^c$

$$Q_{00}^c = -S_{23}(\omega)/S_{22}(\omega). \quad (10.27)$$

Амплитудно-частотная характеристика в произвольном сечении  $a_{0j}^c(\omega)$  определяется по зависимостям (10.25) (или перемножением соответствующих матриц) при учете граничного условия на «входе», полученного по формуле (10.27). Обратим внимание на то, что при  $S_{22}(\omega) = 0$  имеем  $\omega = p_r$ , что соответствует резонансу. Если в нашем случае  $\omega = \omega_j = \sqrt{c_j/m_j}$ , то согласно (10.16)  $J_{0j}^* \rightarrow \infty$ ; при этом во входном сечении механизма  $j$  располагается узел колебаний (антирезонанс), а сам механизм играет роль динамического гасителя.

Если для двух и более механизмов антирезонансные частоты совпадают, то в окрестности этого значения располагаются несколько «собственных» частот. При абсолютно жестком главном вале эта частота оказывается кратной собственной частотой.

При замене  $F_j^c$  на  $F_j^s$  аналогичным образом определяем  $a_{0j}^s(\omega)$ , после чего амплитуду в сечении  $j$  находим как

$$a_{0j}(\omega) = \sqrt{[a_{0j}^c(\omega)]^2 + [a_{0j}^s(\omega)]^2}. \quad (10.28)$$

#### 10.4. Приводы, образующие колебательные системы регулярной структуры

**Предварительные замечания.** Под термином «регулярность» будем понимать совпадение динамической структуры и параметров отдельных подсистем (блоков).

Впервые задача анализа колебательных систем с большим числом идентичных элементов возникла в связи с развитием теории теплоемкости кристаллов[6]. Кристалл можно представить в виде упругой решетки в узлах, в которых располагаются атомы, число которых достигает  $10^{24}$ . Первая удачная попытка определить частоты колебательной системы с такой гигантской размерностью была реализована Дебаем в 1912 г. Дебай представил кристалл как сплошное тело с распределенными параметрами. (Подобную континуальную модель применительно к задачам динамики приводов мы рассмотрим в п.10.5). Однако было выявлено, что на низших частотах такой подход может привести к ошибкам, поэтому к этой проблеме обратились Борн и Карман, определившие частоты и типы колебаний, не представляя дискретную кристаллическую решетку в виде континуума. Таким образом, впервые появился аппарат исследования регулярных колебательных систем большой размерности.

Обычно в машинах циклового действия и автоматических линиях с регулярными системами приходится сталкиваться в связи с широким распространением идентичных механизмов, используемых для реализации однотипных технологических и транспортных операций. В подобных случаях в виду естественного стремления к унификации и взаимозаменяемости отдельных деталей и целых узлов машины возникает определенная повторяемость блоков динамической модели привода.

С позиций динамики машин с регулярностью связаны некоторые специфические эффекты, причем, как правило, нежелательные. При абсолютно жестком главном вале и идентичных механизмах появляются кратные «собственные» частоты, которые при учете упругости вала трансформируются в частотный спектр повышенной плотности [4\*]. Это приводит к повышению виброактивности системы, а в расчетном плане – к определенным трудностям, проявляющимся в большой чувствительности результата к малым изменениям параметров. С другой стороны, для регулярных систем могут быть использованы некоторые специальные приемы анализа, с помощью которых удастся дальше продвинуть аналитические методы. При этом не только устраняются вычислительные трудности, но и создаются эффективные способы для рационального динамического проектирования машин.

**«Собственные» частоты и нестационарные коэффициенты формы.** Для пояснения методики решения обратимся к динамической модели привода, состоящего из главного вала и  $n$  идентичных исполнительных механизмов (см. рис.10.2). Как было показано в п.10.2, преобразование амплитудных значений и

сил при переходе через блок  $j$  описывается уравнением (10.14), которому соответствуют следующие рекуррентные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} a_{0j} &= A_{0j}a_{0,j-1} + B_{0j}Q_{0,j-1}; \\ Q_{0j} &= C_{0j}a_{0,j-1} + D_{0j}Q_{0,j-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.29)$$

Напомним, что каждый блок  $j$  состоит из участка вала с коэффициентом крутильной жесткости  $c_{0j}$  и некоторого условного диска, момент инерции которого  $J_{0j}^*$  согласно (10.16) включает момент инерции входного звена  $J_{0j}$  и дополнительное слагаемое, связанное с динамической жесткостью механизма  $j$ . При идентичных механизмах элементы матрицы  $\Gamma_{0j}$  не зависят от  $j$ , поэтому в дальнейшем примем  $A_{0j} = A_0$ ,  $B_{0j} = B_0$ ,  $C_{0j} = C_0$ ,  $D_{0j} = D_0$ .

Формулы (10.29) можно рассматривать как линейную систему разностных уравнений, решение которой будем искать в форме  $a_{0j} = \eta a_{0,j-1}$ ;  $Q_{0j} = \eta Q_{0,j-1}$ . Тогда на основании (10.29)

$$\left. \begin{aligned} (A_0 - \eta)a_{0,j-1} + B_0Q_{0,j-1} &= 0; \\ C_0a_{0,j-1} + (D_0 - \eta)Q_{0,j-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

Исключая тривиальное нулевое решение, обратим определитель этой системы в нуль. Корни полученного таким образом квадратного характеристического уравнения, являющиеся собственными значениями матрицы перехода  $\Gamma_{0j}$ , равны

$$\eta = \xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}, \quad (10.31)$$

где  $\xi = 0,5(A_0 + D_0)$ ;  $i = \sqrt{-1}$ . (Здесь учтено, что  $\det \Gamma_{0j} \equiv 1$ .)

Сумму элементов главной диагонали матрицы называют ее следом. Таким образом,  $\xi = 0,5S_p \Gamma_{0j}$ , где  $S_p \Gamma_{0j}$  – след матрицы перехода блока. В зависимости от значения  $\eta$  могут представиться случаи  $\xi < 1$ ,  $\xi > 1$ ,  $\xi < -1$ .

При  $\xi < 1$  коэффициент при мнимой части  $\text{Im} \eta \neq 0$ . Тогда характеристические числа представляют собой взаимно сопряженные комплексные числа с модулем, равным единице. Принимая  $\xi = \cos \gamma$ , на основании (10.31) имеем

$$\eta = \cos \gamma \pm i \sin \gamma = e^{\pm i\gamma}. \quad (10.32)$$

Так же, как и при решении линейных дифференциальных уравнений, в этом случае решение системы (10.29) описывается тригонометрическими функциями. При этом

$$\left. \begin{aligned} a_{0j} &= h_1 \cos j\gamma + h_2 \sin j\gamma; \\ Q_{0j} B_0 &= h_1 [\cos(j+1)\gamma - \cos j\gamma] + h_2 [\sin(j+1)\gamma - \sin j\gamma]. \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

Значения  $h_1$  и  $h_2$  определяются из граничных условий.

В п.10.2 были рассмотрены четыре случая граничных условий. Анализ начнем с рассмотрения самого простого случая 1, когда  $a_{00} = 0$ ,  $a_{0,n+1} = 0$  («вход» и «выход» - заземлены). Напомним, что термин «заземление» не следует понимать буквально. Как было показано в п.4.8, если колебательная система имеет на «входе» или «выходе» элементы с сравнительно большими массами или моментами инерции, то соответствующие сечения в относительном движении (в данном случае при колебаниях) можно считать заземленными. Аналогичная ситуация возникает при принудительном движении этих сечений, что эквивалентно бесконечно большой жесткости. Принимая  $j=0$  и  $j=n+1$ , имеем  $h_1 = 0$  и  $\sin(n+1)\gamma = 0$ . Последнему условию соответствует

$$\gamma_r = r\pi / (n+1), \quad (10.34)$$

где  $r = 1, \dots, n$  – номер формы колебаний главного вала.

При этом частотное уравнение в общем виде может быть записано следующим образом:

$$\xi_r = \cos \gamma_r(p) = 0,5[A_0(p) + D_0(p)]. \quad (10.35)$$

Если в модели привода, показанного на рис.10.2, заменить свободный конец заделкой, то при учете  $A_0 = 1$ ,  $D_0 = 1 - J_0^*(p)p^2$  на основании (10.35) имеем

$$1 - \cos \gamma_r = 0,5J_0^*(p)p^2 / c_0. \quad (10.36)$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $J_0^* = J_0 = \text{const}$ . При этом корни уравнения (10.36), соответствующие собственным частотам, определяются следующей зависимостью:

$$p_r = 2p_0 \sin \frac{r\pi}{2(n+1)}, \quad (10.37)$$

где  $p_0 = \sqrt{c_0 / J_0}$ .

Форма колебаний  $r$  описывается зависимостью (10.33) при подстановке  $h_1 = 0$ ,  $\gamma = \gamma_r$ , причем число форм главного вала  $n$  при этом совпадает с числом собственных частот.

При учете упругости механизмов функция  $J_0^*(p)$  описывается зависимостью (10.16). При этом (10.36) приводится к биквадратному уравнению относительно  $p$ , решение которого для фиксированного  $r$  дает два действительных корня  $p_{r1}$  и  $p_{r2}$  ( $p_{r2} > p_{r1}$ ). Теперь число «собственных» частот равно  $2n$  и в два раза превышает число форм главного вала. Однако для системы в целом эти две группы форм различаются тем, что при  $p_r = p_{r1}$  «вход» и «выход» механизмов колеблются в одной и той же фазе, а при  $p_r = p_{r2}$  – в противофазах.

Граничным условиям модели, приведенной на рис.10.2, отвечает случай 2 ( $a_{00} = 0$ ,  $Q_{0n} = 0$ ). Граничное условие на «входе» согласно (10.33) снова предопределяет синусоидальный характер форм главного вала. При этом  $h_1 = 0$  и  $a_{0j} = h_2 \sin j\gamma$ . На основании первого уравнения системы (10.29)  $B_0 Q_j = a_{j+1} - A_0 a_j$ . Тогда при учете  $A_0 = 1$  после подстановки в (10.33) получаем  $B_0 Q_n = h_2 [\sin(n+1)\gamma - \sin n\gamma] = 0$ . Поскольку  $h_2 \neq 0$ , отсюда следует  $\sin(n+1)\gamma - \sin n\gamma = 2 \cos(n+0,5\gamma) \sin 0,5\gamma = 0$ , что при учете  $\gamma \neq 0$  приводит к уравнению  $\cos(n+0,5\gamma) = 0$ . Следовательно,

$$\gamma_r = \pi \frac{2r-1}{2(n+0,5)} \quad r=1, \dots, n. \quad (10.38)$$

Частотное уравнение сохраняет вид (10.36), однако при другом значении  $\gamma_r$ , полученном в соответствии с зависимостью (10.38). При  $J_0^* = J_0 = \text{const}$  колебательная система имеет  $n$  степеней свободы. Собственные частоты находятся аналогично предыдущему случаю:

$$p_r = 2p_0 \sin\left[\pi \frac{2r-1}{4(n+0,5)}\right]. \quad (10.39)$$

На рис.10.3 для данного случая приведены графики  $p_r/p_0$  при  $n=6$  (кривая 1),  $n=9$  (кривая 2),  $n=12$  (кривая 3).

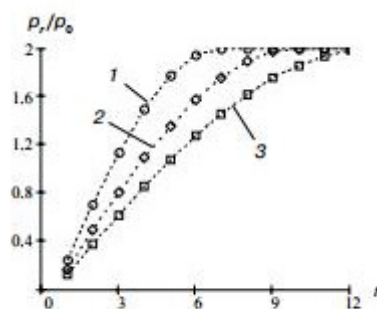


Рис. 10.3

Если каждый из механизмов схематизирован в виде колебательной системы с одной степенью свободы (см. формулу (10.16)), то для данного значения  $r$ , как и раньше, приводим (10.36) к виду биквадратного уравнения, решение которого дает два значения частоты. При этом число «собственных» частот равно числу степеней свободы  $2n$ . Формулы (10.37), (10.39) устанавливают границы области существования спектра «собственных» частот, называемой нередко областью «пропускания». Так, например, из формулы (10.37) следует

$$2p_0 \sin \frac{\pi}{2(n+1)} \leq p_r < 2p_0,$$

а из формулы (10.39) –

$$2p_0 \sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \leq p_r < 2p_0.$$

В обоих случаях высшая собственная частота не превосходит значения  $2p_0$ . Подобные оценки весьма существенны для динамического синтеза приводов сложной структуры.

Приведенный анализ наглядно показал «могущество» аппарата исследования регулярных систем. Действительно, мы аналитическим путем определили спектр «собственных» частот для колебательной системы с любым конечным числом степеней свободы!

Выше мы рассмотрели наиболее распространенный случай, когда  $\xi < 1$ . Такая ситуация имеет место почти на всем частотном диапазоне за исключением узких зон в окрестности  $J_0^* \rightarrow \infty$ . В этих зонах имеет место повышенная плотность «собственных» частот, причем наряду со случаем  $\xi \leq 1$  встречаются случаи  $\xi > 1$  и  $\xi < -1$ . При  $\xi > 1$  ( $\text{Im} \eta = 0$ ), принимая  $\xi = \text{ch} \gamma$  и проведя аналогичные выкладки, получаем выражения, отличающиеся от приведенных выше лишь тем, что тригонометрические функции заменены одноименными гипербо-

лическими. При  $\xi < -1$  ( $\text{Im } \eta = 0$ ) условие  $\xi = \text{ch } \gamma$  удовлетворяется лишь при  $\gamma = \gamma^0 + i\pi$  ( $i = \sqrt{-1}$ ). При этом имеем

$$\cos(\gamma^0 + i\pi) = \text{ch } \gamma^0 \text{ch } i\pi + \text{sh } \gamma^0 \text{sh } i\pi = -\text{ch } \gamma^0 \leq -1.$$

Таким образом, следует принять  $\text{ch } \gamma^0 = -\xi$ , причем теперь  $\gamma^0$  – действительное число. На основании теоремы Муавра имеем  $\text{ch } j\gamma = (-1)^j \text{ch } j\gamma^0$  и  $\text{sh } j\gamma = (-1)^j \text{sh } j\gamma^0$ . С учетом этих корректив справедливы зависимости для случая  $\xi > 1$ .

Итак, наряду с традиционным случаем, когда формы колебаний имеют обычный тригонометрический вид, на определенном частотном интервале ( $|\xi| > 1$ ) они описываются гиперболическими функциями. Применительно к модели привода (см. рис.10.2) это приводит к тому, что имеет место своеобразное пространственное затухание колебаний, при котором амплитуда блоков  $|a_{0j}|$  убывает по мере приближения к заделке. Характерная особенность случая  $\xi < -1$  состоит в том, что знак  $a_{0j}$  меняется при переходе через каждый блок.

Отметим, что современные методы компьютерного расчета, по сути, не ограничивают возможность реализации изложенного подхода для приводов кольцевой и разветвленно-кольцевой структуры, а также других сложных систем с повторяющимися блоками [3].

**Вынужденные колебания.** Определим амплитуду вынужденных колебаний от действия вынуждающей силы  $F(t) = F^c \cos \omega t + F^s \sin \omega t$ , приложенной к выходному звену каждого из идентичных механизмов. Поскольку методика расчета для обоих компонентов вынуждающей силы идентична, ограничимся учетом косинусоидальной составляющей. Тогда рекуррентные зависимости имеют вид (10.25) и представляют собой неоднородную систему разностных уравнений. При этом вместо зависимости (10.33) теперь получаем

$$a_{0j}^c(\omega) = h_1^c(\omega) \cos j\gamma + h_2^c(\omega) \sin j\gamma + Y_a^c \quad (j = \overline{1, n}). \quad (10.40)$$

Здесь  $Y_a^c$  – частное решение, для определения которого можно воспользоваться системой уравнений (10.25). Из второго уравнения этой системы следует, что частное решение (по силе) равно  $Y_Q^c = -F^c / D_j(\omega)$ .

После подстановки  $Q_{0,j-1}^c = Y_Q^c$  в первое уравнение системы (10.25) имеем  $Y_a^c = -B_0(\omega) F^c / D_j(\omega)$ . Для модели, приведенной на рис.10.2,  $D_j = (1 - m\omega^2 / c) / \Pi'$ ,  $Y_Q^c = -F^c \Pi' / (1 - m\omega^2 / c)$ . Поскольку к идентичным меха-

низмам приложены одинаковые силы, индекс  $j$  может быть опущен. Частное решение  $Y_Q^c$  соответствует приведенному к валу максимальному моменту от силы, приложенной к выходному звену, а  $Y_a^c$  – угловой деформации участка вала под действием этого момента.

Учет граничных условий производится так же, как и при определении спектра собственных частот. В частности, для случая 1, когда оба конца вала соответствуют в переносном движении заделке, на основании (10.40) получим

$$\begin{aligned} a_{00}^c &= h_1(\omega) + Y_a^c = 0 & (j=0); \\ a_{0,n+1} &= h_1(\omega) \cos(n+1)\gamma + h_2(\omega) \sin(n+1)\gamma = 0 & (j=n+1). \end{aligned}$$

Отсюда следует  $h_1(\omega) = -Y_a^c$ ;  $h_2(\omega) = -h_1(\omega) \operatorname{ctg}(n+1)\gamma$ . В окончательном виде формула (10.40) принимает вид

$$a_{0j}^c(\omega) = \frac{B_0 F^c}{D_j} [\cos j\gamma - \operatorname{ctg}(n+1)\gamma \sin j\gamma - 1]. \quad (10.41)$$

Напомним, что  $\cos \gamma = \xi = 0,5[A_0(\omega) + D_0(\omega)]$ ; это соответствует формуле (10.35), однако в отличие от свободных колебаний теперь вместо частоты  $p_r$  фигурирует частота вынуждающей силы  $\omega$ . Если  $\omega = p_r$ , согласно (10.34)  $\gamma = \pi r / (n+1)$ , следовательно  $|\operatorname{ctg}(n+1)\gamma| \rightarrow \infty$ , и имеет место резонанс.

Аналогичным образом находим  $a_{0j}^s(\omega)$ , после чего амплитудно-частотная характеристика в произвольном сечении определяется как

$$a_{0j}(\omega) = \sqrt{(a_{0j}^c(\omega))^2 + (a_{0j}^s(\omega))^2}. \quad (10.42)$$

При  $a_{00} = 0$ ,  $Q_{0n} = 0$  (случай 2)

$$\left. \begin{aligned} h_1^{c,s}(\omega) + Y_a^{c,s} &= 0; \\ h_1^{c,s}(\omega) [\cos(n+1)\gamma - \cos n\gamma] + h_2^{c,s}(\omega) [\sin(n+1)\gamma - \sin n\gamma] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.43)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} h_1^{c,s}(\omega) &= F^{c,s} B_0(\omega) / D_j(\omega); \\ h_2^{c,s}(\omega) &= F^{c,s} B_0(\omega) \operatorname{tg}(n+0,5)\gamma / D_j(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

После подстановки (10.44) в (10.40) получаем зависимость, определяющую амплитудно-частотную характеристику в произвольном сечении главного вала  $j$

$$a_{0j}^{c,s}(\omega) = \frac{F^{c,s} B_0(\omega)}{D_j(\omega)} [\cos j\gamma - 1 + \operatorname{tg}(n+0,5)\gamma \sin j\gamma]. \quad (10.45)$$

При  $\omega = p_r$  согласно (10.40) имеем  $\gamma = \gamma_r$ ; при этом  $|\operatorname{tg}(n+0,5)\gamma_r| \rightarrow \infty$ ,  $a_{0j}^{c,s}(\omega) \rightarrow \infty$ , что соответствует резонансу.

Формула (10.45) свидетельствует еще об одном возможном резонансном состоянии системы, что связано с возможностью обращения в нуль  $D_j(\omega)$ . Действительно, для рассмотренной модели

$$D_j(\omega) = 1 - J_*(\omega)\omega^2 / c_0 = 1 - [J_0 + m\Pi'^2 / (1 - \omega^2 / k_j^2)]\omega^2 / c_0, \quad (10.46)$$

где  $k_j^2 = c_j / m_j$ .

Чисто формально, обращая это выражение в нуль, можно найти соответствующие критические частоты  $\omega$ . Следует однако иметь в виду, что рассмотренная тригонометрическая форма колебаний соответствует условию  $\xi = \cos \gamma = 1 - 0,5J_*\omega^2 / c_0$ , поэтому  $|1 - 0,5J_*\omega^2 / c_0| \leq 1$ . Отсюда следует, что  $J_*(\omega) < 0$ , либо  $J_*(\omega)\omega^2 / c_0 > 2$ . При нарушении этих условий, как уже отмечалось, форма колебаний описывается гиперболическими функциями. Обычно это имеет место на ограниченном частотном диапазоне в окрестности значения  $k_j$ . При  $\omega = k_j$  согласно (10.46) имеем  $D_j(\omega) \rightarrow \infty$ . Тогда на основании (10.45)  $a_{0j}^{c,s}(k_j) = 0$ ; это означает, что при данной частоте имеет место антирезонанс, а механизмы играют роль динамических гасителей. Однако при большом числе механизмов  $n$  в окрестности частоты  $k_j$  наблюдается сгущение «собственных» частот, а следовательно, и резонансных зон, поэтому надежную настройку на режим динамического гашения практически реализовать не удастся.

## 10.5. Расчет колебаний на базе континуальных моделей

**Предварительные замечания.** Сложность современных машин и большая динамическая связанность отдельных ее узлов, как уже отмечалось, приводит к необходимости рассмотрения колебательных систем с большим числом степеней свободы.

При анализе, а особенно при динамическом синтезе таких систем, нередко возникают определенные трудности вычислительного характера, характери-

зубые образным термином «*проклятие размерности*». Кроме того, при этом массив обобщенных координат и варьируемых параметров становится трудно обозримым.

Для преодоления подобных трудностей при исследовании сложных объектов механики, автоматического управления, экономики в настоящее время все большее распространение находят идеи агрегирования системы, основанные на интегральном представлении ее параметров. Применительно к задачам динамики машин в развитие подобных подходов были предложены континуальные модели, в которых кинематические, упругие и инерционные свойства механизмов отображены некоторой «псевдосредой». Это позволяет оперировать обобщенным представлением группы переменных и существенно сократить число характеристик, описывающих колебательную систему [4\*]. В результате удается значительно упростить динамический анализ и синтез системы, а во многих случаях представить решение в аналитической форме.

**Математическая модель.** Конкретизируем методику использования континуальной модели применительно к задачам динамики машин на примере привода с  $n$  идентичными цикловыми механизмами, ответвляющимися от главного вала (см. рис.10.2). В отличие от модели привода регулярной структуры, рассмотренной в п.10.3, представим главный вал в виде крутильной подсистемы с распределенными параметрами (см. п.п.4.11, 5.11), а присоединенные к валу механизмы – в виде некоторой псевдосреды (рис.10.4).

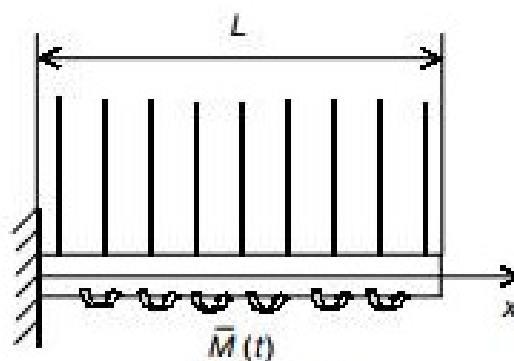


Рис. 10.4

Каждый элемент этой псевдосреды, изображенный на модели вертикальными прямыми, образован «размазыванием» упругих, инерционных и кинематических характеристик вдоль оси вала и обладает свойством передавать движение и силы. При этом взаимодействие элементов псевдосреды между собой происходит только через главный вал. Некоторой аналогией данной модели может служить совокупность параллельно натянутых и не связанных между собой нитей (но не ткани!), закрепленных на общем основании. Данная модель отвечает относительной системе координат, поэтому сечение  $x=0$ , вращающееся с постоянной переносной угловой скоростью  $\omega_0$ , изображено в виде заделки.

При регулярной системе идентичных механизмов «плотность» среды является постоянной, что соответствует равномерному распределению элементов вдоль вала. Характеристикой среды будет служить распределенная модифицированная матрица перехода механизма

$$\bar{\Gamma} = \prod_{j=n}^1 \bar{\Gamma}_j,$$

которая формируется как произведение в обратном порядке матриц перехода механизмов (см. п.10.1) с той, однако, разницей, что при определении  $\bar{\Gamma}_j$  для инерционных и упругих элементов их следует предварительно распределить в по оси вала  $x$ . При этом вместо массы или момента инерции будут фигурировать  $\bar{m} = nm_j/L$ ,  $\bar{J} = nJ_j/L$ , а вместо коэффициента жесткости  $\bar{c} = nc_j/L$ .

Как было показано в п.10.2, учет динамических характеристик механизма  $j$  согласно (10.16) может быть осуществлен введением приведенного момента  $J_{0j}^*$ . Тогда погонный момент инерции вала определяется как

$$\rho(p) = \rho_0 - nR_j(p)/(p^2L),$$

где  $\rho_0$  – погонный момент инерции собственно вала,  $p$  – собственная частота (при расчете вынужденных колебаний вместо  $p$  следует подставить частоту вынуждающей силы  $\omega$ ).

Если первая передаточная функция механизмов является константой ( $\Pi'_j = \text{const}$ ), как это, например, имеет место в зубчатых механизмах с постоянным передаточным отношением, имеем  $\rho(p) = \text{const}$ . В этом случае, повторяя выкладки, приведенные в п.4.11, получаем следующее дифференциальное уравнение в частных производных

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + GI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \bar{M}(t), \quad (10.47)$$

где  $\varphi(x, t)$  – угловая координата главного вала, соответствующая колебаниям;  $G$  – модуль сдвига;  $I_0$  – полярный момент инерции;  $\bar{M}(t)$  – приведенный к главному валу вынуждающий момент, отнесенный к единице длины (см. ниже).

**Определение «собственных» частот и нестационарных форм колебаний.** При решении этой задачи в уравнении (10.47) следует принять  $\bar{M}(t) = 0$ . Для цикловых механизмов первая передаточная функция  $\Pi'$  при  $\omega \ll p$  медленно изменяется в зависимости от  $\varphi_0 = \omega_0 t$ , где  $\omega_0$  – угловая скорость главного вала. В этом случае функции  $J_{0j}^*(\varphi_0)$ ,  $R_j^*(\varphi_0)$ ,  $\rho(\varphi_0)$  также оказываются мед-

ленно меняющимися, а свободные колебания описываются зависимостью, аналогичной (10.20). Частное решение уравнения (10.47) ищем в виде

$$\varphi(x, \varphi_0) = X(x, \varphi_0) \sqrt{p(0)/p(\varphi_0)} \sin\left(\int_0^{\varphi_0} p(u) du + \alpha\right).$$

После подстановки в дифференциальное уравнение (10.47) получаем уравнение относительно амплитудной функции  $X(x, \varphi_0)$  (см. п.4.11)

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + P(\varphi_0)X = 0, \quad (10.48)$$

где  $P(\varphi_0) = \rho(\varphi_0)p^2/(GI_0)$ .

В общем случае функция  $\rho(\varphi_0)$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для модели, показанной на рис.10.2,  $\rho = \rho_0 + \bar{m}\Pi'^2/(1 - p^2/k^2)$ , где  $k = \sqrt{c_j/m_j}$  – парциальная частота механизма, отвечающая заземлению на его «входе». Тогда условию  $\rho(\varphi_0) > 0$  соответствуют частотные интервалы  $p/k < 1$  и  $p/k > \sqrt{1 + \bar{m}\Pi'^2/\rho_0}$ , а интервалу  $1 < p/k < \sqrt{1 + \bar{m}\Pi'^2/\rho_0}$  – условие  $\rho(\varphi_0) < 0$ .

При  $\rho(\varphi_0) > 0$  ( $P(\varphi_0) > 0$ ) функция  $X$  имеет тригонометрическую форму

$$X(x, \varphi_0) = h_1(\varphi_0) \cos \sigma x + h_2(\varphi_0) \sin \sigma x, \quad (10.49)$$

где  $\sigma(\varphi_0) = \sqrt{P(\varphi_0)}$ .

В рассматриваемом примере граничные условия имеют вид  $X(0, \varphi_0) = 0$ ,  $\partial X/\partial x(L, \varphi_0) = 0$ . Отсюда следует  $\cos(\sigma(\varphi_0)L) = 0$ . После подстановки функции  $P(\varphi_0)$  и элементарных преобразований получаем частотное уравнение в форме

$$p_r^2(\varphi_0) = \frac{c\pi^2(2r-1)^2}{4\left\{J_0 + nm_j\Pi'^2 / \left[1 - p_r^2(\varphi_0)/k^2\right]\right\}}. \quad (10.50)$$

Здесь  $c = GI_0/L$  – коэффициент крутильной жесткости вала,  $r$  – номер формы колебаний главного вала.

Уравнение (10.50) приведем к виду биквадратного уравнения, имеющего два действительных корня  $p_{r1}(\varphi_0)$  и  $p_{r2}(\varphi_0)$ . Первый из корней соответствует синфазным колебаниям входных и выходных элементов механизма, а второй – противофазным колебаниям. При  $c_j \rightarrow \infty$  на основании (10.50) получаем

$$p_r(\varphi_0) = \frac{\pi(2r-1)}{2} \sqrt{\frac{c}{J_0 + nm_j \Pi'^2(\varphi_0)}}. \quad (10.51)$$

Форма колебаний описывается следующей зависимостью:

$$X_r(x, \varphi_0) = \sin(\sigma_r(\varphi_0)x), \quad (10.52)$$

где  $\sigma_r(\varphi_0) = p_r(\varphi_0) \sqrt{\rho(\varphi_0)/(GI_0)}$ .

При  $\rho(\varphi_0) < 0$  ( $P(\varphi_0) < 0$ ) амплитудная функция  $X$  описывается гиперболическими функциями.

$$X(x, \varphi_0) = h_1(\varphi_0) \operatorname{ch} \sigma^0 x + h_2(\varphi_0) \operatorname{sh} \sigma^0 x, \quad (10.53)$$

где  $\sigma^0(\varphi_0) = \sqrt{|P(\varphi_0)|}$ .

Граничное условие  $X(0, \varphi_0) = 0$  удовлетворяется при  $h_1(\varphi_0) = 0$ . Второе граничное условие  $\partial X / \partial x(L, \varphi_0) = 0$ , при  $h_2(\varphi_0) \neq 0$  принимает вид  $\sigma^0 \operatorname{ch} \sigma^0 L = 0$ . Поскольку  $\operatorname{ch} \sigma^0 L \geq 1$ , получаем  $\sigma^0(p) = 0$ . Для данной модели этому условию соответствует

$$p_*(\varphi_0)/k = \sqrt{1 + \bar{m} \Pi'^2(\varphi_0)/\rho_0}. \quad (10.54)$$

Однако условие  $\sigma^0(p) = 0$  противоречит исходному предположению  $\rho < 0$ , так как при этом  $\rho = 0$ . В этом случае в уравнении (10.48) следует принять  $P(\varphi_0) = 0$ . Тогда форма колебаний описывается следующим образом:

$$X = 0,5x^2 - Lx. \quad (10.55)$$

Таким образом, гиперболическая форма свободных колебаний в рассмотренной модели не реализуется, однако она может иметь место при вынужденных колебаниях (см. ниже).

Частота, определяемая формулой (10.54), отвечает верхней границе частотного диапазона, на котором форма колебаний не описывается тригонометрическими функциями.

**Вынужденные колебания.** Примем, что к выходному звену каждого из механизмов приложена вынуждающая сила  $Q_j = F_j \cos \omega t$ . Как было показано в п.10.2, от каждой из этих сил на главный вал передается момент  $M_j = -F_j D_j^{-1} \cos \omega t$  (см. формулы (10.24), (10.25)). При этом распределительный по оси  $x$  реактивный вынуждающий момент равен  $\bar{M}(t) = -FnD^{-1}L^{-1} \cos \omega t$ .

(Так как механизмы и приложенные вынуждающие силы идентичны, индекс  $j$  может быть опущен). Ограничиваясь рассмотрением нерезонансного случая, будем искать решение уравнения (10.47) в виде

$$\varphi(x, t) = Y(x, \varphi_0) \cos \omega t. \quad (10.56)$$

Здесь  $Y(x, \varphi_0)$  – амплитудная функция, которая медленно изменяется в зависимости от так называемого *медленного времени*  $\varphi_0 = \omega_0 t$ .

После подстановки (10.56) в (10.47) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции  $Y(x, \varphi_0)$ :

$$\partial^2 Y / \partial x^2 + P(\varphi_0) Y = \bar{M}_*(\varphi_0) / (GI_0), \quad (10.57)$$

где  $\bar{M}_*(\varphi_0) = -FD^{-1}(\varphi_0)L^{-1}$ ;  $P(\varphi_0) = \rho(\varphi_0)\omega^2 / (GI_0)$ . (Функции  $P(\varphi_0)$  и  $\rho(\varphi_0)$  отличаются от использованных в уравнении (10.48) лишь заменой частоты свободных колебаний  $p$  на частоту вынуждающих сил  $\omega$ ).

При  $\rho(\varphi_0) > 0$  решение уравнения (10.57) имеет вид

$$Y = h_1 \cos \sigma x + h_2 \sin \sigma x + Y_*, \quad (10.58)$$

где  $\sigma(\varphi_0) = \sqrt{P(\varphi_0)}$ ;  $Y_* = \bar{M}_* / (\rho(\varphi_0)\omega^2)$  – частное решение.

Для данной модели

$$Y_*(\varphi_0) = -\frac{F\Pi'(\varphi_0)}{\omega^2 [\rho_0(1 - \omega^2/k^2) + \bar{m}\Pi'^2(\varphi_0)]}. \quad (10.59)$$

При граничных условиях  $Y(0, \varphi_0) = 0$  и  $\partial Y / \partial x(L, \varphi_0) = 0$  имеем

$$Y = -Y_*(\cos \sigma x + \operatorname{tg} \sigma L \sin \sigma x). \quad (10.60)$$

Как и следовало ожидать, при  $\omega = p_r(\varphi_0)$  наступает резонанс ( $|\operatorname{tg} \sigma L| \rightarrow \infty$ ). Следует, однако, иметь в виду, что «собственная» частота  $p_r$  является медленно меняющейся функцией, поэтому резонансная частота «плавает». При этом вместо четко выраженного резонансного пика обычно наблюдается режим биений.

При  $\rho(\varphi_0) < 0$  ищем решение в форме гиперболических функций. Тогда

$$Y = Y_*[\operatorname{ch}(\sigma^0 x) - \operatorname{th}(\sigma^0 L)\operatorname{sh}(\sigma^0 x)], \quad (10.61)$$

где  $\sigma^0 = \sqrt{|P(\varphi_0)|}$ .

Из формулы (10.59) следует, что  $|Y_*(\varphi_0)| \rightarrow \infty$  при

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{1 + \frac{\bar{m}\Pi'^2}{\rho_0}}. \quad (10.62)$$

При  $\omega = p_*$  формулы (10.62) и (10.54) совпадают. В окрестности этой частоты резонансная форма колебаний описывается параболой (см. (10.55)).

Лаконичность приведенных выше выкладок и конечная форма полученных аналитических зависимостей свидетельствует о больших предсказательных возможностях континуальных моделей, что особенно важно на стадии динамического синтеза сложных колебательных систем рассматриваемого класса.

### 10.6. Использование матриц перехода при исследовании колебаний приводов машин с учетом диссипативных сил

**Предварительные замечания.** В предыдущих параграфах были изложены матричные методы определения амплитудно-частотных характеристик без учета сил сопротивления. В этом случае фаза гармонических колебаний во всех элементах системы либо совпадала, либо была равна  $\pi$ , о чем свидетельствовало отрицательное значение соответствующей амплитуды. Естественно, что при этом информация о поведении колебательной системы на частотных диапазонах в окрестности резонансов оказалась существенно искаженной. В частности, при линейной или линеаризованной силе сопротивления вместо ограниченной амплитуды имело место ее неограниченное возрастание; кроме того, не находил отражение фазовый сдвиг между вынужденными колебаниями и вынуждающей силой, который при резонансе равен  $\pi/2$ .

Для устранения отмеченных выше лимитирующих свойств матриц перехода введем в рассмотрение так называемые **комплексные амплитуды**, способные учесть не только величину амплитуды, но и фазу колебаний (см. п.9.1).

**Матрицы перехода с комплексными элементами.** Представим гармонические колебания  $q = a \sin(\omega t + \alpha)$  в комплексной форме

$$q = a e^{i(\omega t + \alpha)} = a e^{i\alpha} e^{i\omega t}. \quad (10.63)$$

Пусть  $\tilde{a} = a e^{i\alpha}$  – комплексная амплитуда, модуль которой равен амплитуде колебаний, а аргумент  $\alpha$  – фазе колебаний. Аналогичным образом гармонической силе отвечает комплексное число  $\tilde{Q} = Q e^{i\alpha}$ .

В п.9.1 на основании (9.4) была получена зависимость для комплексного коэффициента жесткости  $\tilde{c} = c(1 + 2\delta i)$ , соответствующий упругодиссипативному элементу при учете позиционной силы трения с коэффициентом рассея-

ния  $\psi$  ( $\delta \approx \psi/(4\pi)$ ). Таким образом, в данном случае для учета диссипативной силы достаточно в рекуррентных зависимостях (10.1) и при их представлении в матричном виде (10.2) заменить коэффициент жесткости  $c$  на его комплексную форму  $\tilde{c}$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_j &= \tilde{A}_j \tilde{a}_{j-1} + \tilde{B}_j \tilde{Q}_{j-1}; \\ \tilde{Q}_j &= \tilde{C}_j \tilde{a}_{j-1} + \tilde{D}_j \tilde{Q}_{j-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10.64)$$

где  $\tilde{A}_j, \tilde{B}_j, \tilde{C}_j, \tilde{D}_j$  – в общем случае комплексные элементы матрицы перехода. (При учете только упругодиссипативного элемента  $\tilde{A}_j = A_j = 1$ ,  $\tilde{B}_j = \tilde{c}^{-1}$ ,  $\tilde{C}_j = 0$ ,  $\tilde{D}_j = D_j = 1$ .)

Если сила сопротивления отвечает так называемому вязкому трению, то  $R = -b\dot{q}$ . Поскольку на основании (10.63)  $\dot{q} = i\tilde{a}\omega e^{i\omega t}$ , то в зависимостях (10.64) при учете правила знаков (см. п.10.1) следует принять  $\tilde{A}_j = 1$ ,  $\tilde{B}_j = (b\omega i)^{-1}$ ,  $\tilde{C}_j = 0$ ,  $\tilde{D}_j = 1$ . С учетом этих корректив рассмотренный в данной главе матричный метод анализа колебаний приводов приобретает достаточно общий характер.

**Колебания привода при учете динамической характеристики электропривода и механических характеристик привода машины.** Рассмотрим динамическую модель, образованную последовательным соединением подсистем электродвигателя и привода машины (рис.10.5).

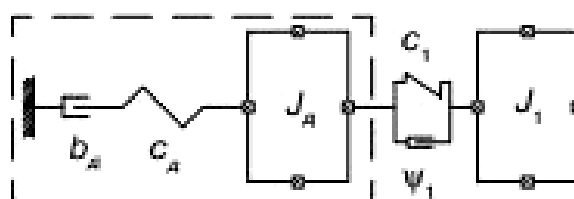


Рис. 10.5

Как было показано в п.5.10, характеристика асинхронного двигателя и двигателя постоянного тока при установившемся режиме соответствует модели, в которой статор (заделка) соединен с ротором, момент инерции которого равен  $J_d$ , посредством последовательного соединения демпфера ( $b_d = (v_d \omega_d^0)^{-1}$ ) и упругого элемента ( $c_d = (v_d \omega_d^0 T_d)^{-1}$ ). Напомним, что согласно условным обозначениям, принятыми в п.5.10,  $\omega_d^0$ ,  $v_d$ ,  $T_d$  – соответственно идеальная угловая

скорость, коэффициент крутизны статической характеристики и электромагнитная постоянная электродвигателя.

Определим матрицу перехода подсистемы электродвигателя, которая на рис.10.5 выделена штрих пунктирными линиями.

$$\Gamma_{\text{д}} = \Gamma_{J_0} \cdot \Gamma_c \cdot \Gamma_b. \quad (10.65)$$

Здесь

$$\Gamma_{J_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -J_0 \omega^2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_c = \begin{pmatrix} 1 & c_{\text{д}}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_b = \begin{pmatrix} 1 & (b_{\text{д}} \omega i)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\omega$  – частота гармонической вынуждающей силы (момента).

«Упругодиссипативную» составляющую этой характеристики представим как

$$\Gamma_{cb} = \Gamma_c \cdot \Gamma_b = \begin{pmatrix} 1 & 1/c_{\text{д}} - i/(b_{\text{д}} \omega) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.66)$$

Из (10.66) следует, что матрица  $\Gamma_{cb}$  обладает перестановочными свойствами, т.е. не зависит от вида последовательности элементов  $c_{\text{д}}$  и  $b_{\text{д}}$ .

Механическая система в рассматриваемой модели представлена упругодиссипативным элементом  $c_1, \psi_1$ , которому отвечает комплексный коэффициент жесткости  $\tilde{c}_1$  и приведенный момент инерции  $J_1$ . Матрица перехода этой подсистемы имеет вид

$$\Gamma_{\text{м}} = \Gamma_{J_1} \cdot \Gamma_{c_1}, \quad (10.67)$$

где

$$\Gamma_{J_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -J_1 \omega^2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{c_1} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}_1^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{c}_1 = c_1(1 + 2\delta_1 i).$$

Пусть к выходному элементу системы приложен гармонический вынуждающий момент  $M = M_1 \sin \omega t$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{M}_{\text{д}} \end{pmatrix}. \quad (10.68)$$

Здесь  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$  – элементы матрицы перехода  $\Gamma = \Gamma_M \Gamma_D$ ;  $\tilde{a}_1$  – комплексная амплитуда на «выходе» (элемент  $J_1$ );  $\tilde{M}_D$  – комплексная амплитуда движущего момента.

Из (10.68) следует  $\tilde{a}_1 = \tilde{B}\tilde{M}_D$  и  $M_1 = \tilde{D}\tilde{M}_D$ . Отсюда

$$\tilde{M}_D = M_1 / \tilde{D}; \quad \tilde{a}_1 = M_1 \tilde{B} / \tilde{D}. \quad (10.69)$$

Амплитудные значения момента двигателя и колебаний привода определяются согласно (10.69) как модули, а фаза колебаний – как аргументы соответствующих комплексных чисел. Эта процедура, как и все промежуточные расчеты, легко реализуется современными компьютерными программами.

**Пример.** Исследуем динамику привода, схематизированного в виде динамической модели, приведенной на рис.10.5, при следующих параметрах:  $\omega_D^0 = 157 \text{с}^{-1}$ ;  $\nu_D = 3 \cdot 10^{-3} (\text{Нм})^{-1}$ ;  $T_D = 0,043 \text{с}$ ;  $J_0 = 0,224 \text{кгм}^2$ ;  $J_1 = J_0 h$ ;  $p_1 = 150 \text{с}^{-1}$ ;  $c_1 = p_1^2 J_1$ ;  $\delta_1 = \psi_1 / (4\pi) = 0,02$ ;  $M_1 = 1 \text{Нм}$ . Здесь в дополнение к условным обозначениям, принятым в п.5.10, введены парциальная частота механической подсистемы  $p_1$ , коэффициент  $h = J_1 / J_0$  и коэффициент демпфирования  $\delta_1$ .

Парциальная частота электродвигателя определяется как  $p_0 = \sqrt{k^2 - n^2}$ , где  $k^2 = (\nu_D T_D J_0 \omega_D^0)^{-1}$ ;  $n^2 = 0,25 T_D^{-2}$  (см. п.5.10). Согласно исходным данным  $p_0 = 9,2 \text{с}^{-1}$ . На рис.10.6 представлены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики  $a(\omega, h)$ ,  $\gamma(\omega, h)$ , где  $a = |\tilde{a}_1|$ ,  $\gamma = -\arg \tilde{a}_1$ . При этом параметр  $h$  принимает значения:  $h = 0,25$  (сплошная линия),  $h = 0,5$  (пунктирная линия),  $h = 1$  (штриховая линия),  $h = 3$  (штрихпунктирная линия).

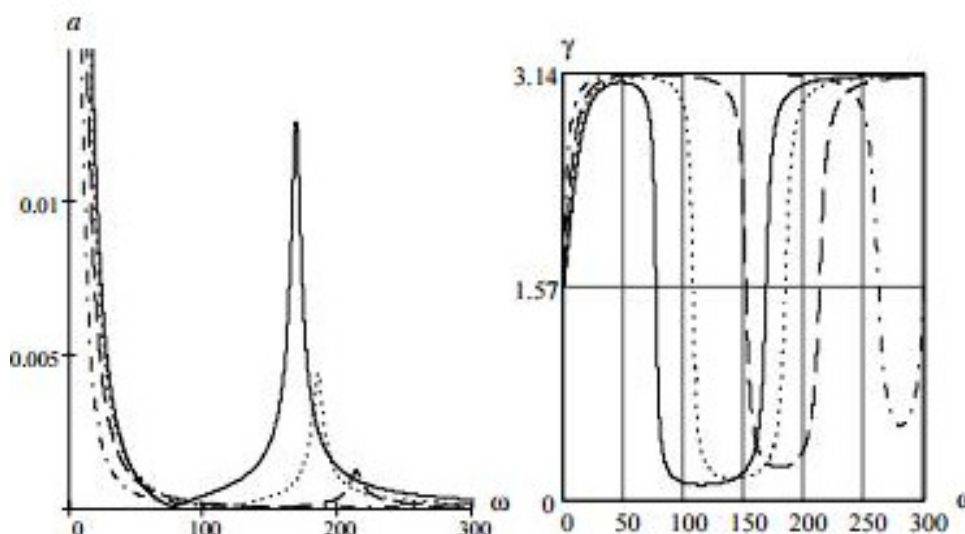


Рис. 10.6

Представляет интерес, что с увеличением параметра  $h$  «механический» резонанс смещается в область более высоких частот. Дело в том, что при малых значениях  $h$  двигатель слабо влияет на эту частоту, и она близка к значению парциальной частоты  $p_1$ . Аналогичная картина имеет место и при больших значениях  $h$ , однако теперь собственная частота стремится к значению, определяемому формулой (4.41), которая в этом случае принимает вид  $k = p_1 \sqrt{1+h}$ . Другими словами, при относительно больших моментах инерции привода проявление роли двигателя сводится лишь к учету момента инерции его ротора.

На рис.10.7 приведено семейство кривых, характеризующих коэффициент неравномерности вращения вала электродвигателя  $\chi_\omega = \Delta\omega_D / \bar{\omega}_D$ , где  $\bar{\omega}_D$  – среднее значение  $\omega_D$ ;  $\chi_\omega = |\tilde{\chi}_\omega|$  при  $\tilde{\chi}_\omega \approx \nu_D \tilde{M}_D (1 + iT_D)$ .

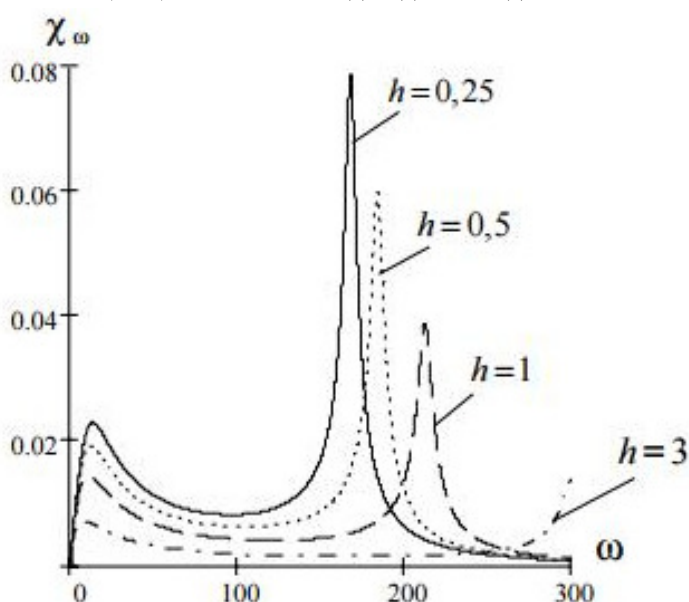


Рис. 10.7

На графиках, как и выше, четко проявляется роль параметра  $h$  в формировании динамических искажений идеальных кинематических характеристик. Обычно приведенный момент инерции привода машины меньше момента инерции ротора двигателя ( $h < 1$ ). В подобных случаях повышение коэффициента неравномерности следует ожидать в окрестности парциальных частот двигателя и колебательной системы привода.

## ГЛАВА 11. ЗАЗОРЫ

### 11.1. Динамические эффекты и математическое описание

**Предварительные замечания.** Зазор, как правило, является сопутствующим фактором любой кинематической пары, осуществляющей подвижное соединение звеньев механизма. При отсутствии зазоров даже при идеальном изготовлении элементов кинематической пары возникает опасность существенного роста реакций. В частности, это наблюдается при температурном расширении деталей, что, в свою очередь, вызывает увеличение сил трения и, в конечном итоге может даже привести к полному заклиниванию механизма.

По существу, кинематическую пару следует отнести к неударивающим связям, к которым обычно относят подвижные соединения звеньев с односторонним контактом. Действительно, хотя кинематическая пара в целом реализует двухстороннюю связь, она при зазорах эту функцию выполняет лишь частично, так как при перекладке в зазоре имеют место локальные разрывы кинематической цепи, характерные для систем с неударивающими связями. Такие связи можно характеризовать как псевдоударивающие.

В данной главе мы остановимся лишь на некоторых характерных динамических проявлениях зазоров и общих подходах к данной проблеме, поскольку ее углубленное рассмотрение выходит за рамки учебного пособия и требует обращения к специальной литературе [3\*],[4\*].

**Влияние зазоров на виброактивность механизма.** По воздействию на колебательную систему можно условно выделить три характерных случая проявления зазора, каждому из которых отвечает соответствующая область изменения параметров и внешних возмущений. В *первом случае* зазор проявляет себя как нелинейный элемент, существенно влияющий на спектр частот свободных колебаний (см. 8.1,а). Во *втором случае* влияние зазора в основном проявляется как импульсное возмущение на ограниченном временном интервале кинематического цикла при отсутствии сколько-нибудь заметного искажения частотного спектра исходной линейной системы. При этом однако сохраняется возможность многократных соударений, приводящих к виброударным режимам, при которых динамический эффект от зазоров приближается к первому случаю. Наконец, в *третьем случае* определяющую роль играют «параметрические импульсы», вызванные достаточно резким изменением спектра собственных частот.

Проблема рационального динамического синтеза колебательных систем с учетом зазоров особо остро встает при проектировании высокоскоростных цикловых механизмов с нелинейной функцией положения, поскольку в этом классе механизмов зазоры могут привести к большим искажениям заданного программного движения рабочих органов, а также к повышению шума и вибро-

активности привода. Нередко именно величина зазоров в конечном итоге лимитирует производительность и эксплуатационные характеристики многих современных технологических машин, что заставляет существенно ужесточить точностные требования при их изготовлении.

**Математическая модель зазора.** Восстанавливающая сила, соответствующая графику, приведенному на рис.8.1,а, описывается следующим образом:

$$F = c(q - \Delta \operatorname{sign} q)u(|q| - \Delta), \quad (11.1)$$

где  $q$  – обобщенная координата;  $\Delta = 0,5s$ ;  $s$  – величина зазора;  $u$  – единичная функция ( $u = 0$  при  $|q| < \Delta$ ;  $u = 1$  при  $|q| \geq \Delta$ ).

Скачкообразное изменение единичной функции соответствует моменту перестройки структуры колебательной системы. С этими моментами переключения иногда связаны определенные трудности при их реализации. Так, например, при использовании численных методов могут появиться особые «скользящие» режимы с большим числом переключений на ограниченном интервале времени. При аналитических исследованиях ступенчатый характер зависимостей может осложнить анализ и оптимизационный синтез из-за нарушения условий дифференцируемости в окрестности указанных зон. Для исключения этого недостатка при сохранении нелинейных свойств функции  $F(q)$  используют аппроксимацию ступенчатых функций непрерывными функциями

$$u(x) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} [0,5 + \pi^{-1} \operatorname{arctg}(L_0 x / \Delta)]_* \approx 0,5 + \pi^{-1} \operatorname{arctg}(Lx / \Delta), \quad (11.2)$$

где  $x = |q| - \Delta$ ;  $L \gg 1$  (обычно число  $L$  должно на несколько порядков превышать отношение  $x / \Delta$ ).

При смене знака  $x$  функция  $u(x)$  согласно (11.2) достаточно быстро изменяется от 0 до 1, сохраняя при этом непрерывный характер. Подобную процедуру иногда называют гладкой аппроксимацией. Как показывает эксперимент, гладкая аппроксимация зазора нередко оказывается даже более точной, чем исходная ступенчатая функция, что по-видимому связано с уменьшением контактной жесткости элементов кинематической пары в окрестности моментов переключений, наличием слоя смазки и другими сглаживающими факторами.

## 11.2. Возбуждение колебаний при ударном характере взаимодействия элементов кинематических пар

**Анализ характерных режимов численными методами.** Особенности проявления зазоров при колебаниях проиллюстрируем на примере циклового механизма, динамическая модель которого приведена на рис.11.1. Помимо традиционных элементов на модели показан элемент  $s$ , отвечающий зазору. Этой модели при учете (11.1), (11.2) соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + k_0^2(2\delta k_0^{-1}\dot{q} + q)\Psi(q) = w(t). \quad (11.3)$$

Здесь принято, что абсолютная координата выходного звена представлена как  $y(\varphi_1) = \Pi(\varphi_1) + q \pm \Delta$ , где  $\Pi(\varphi_1)$  – функция положения механизма,  $\varphi_1 = \omega t$ ,  $\omega$  – угловая скорость входного звена,  $q$  – обобщенная координата;  $k_0 = \sqrt{c/m}$  – собственная частота при отсутствии зазора;  $\Psi(q) = F(q)/m$  (см. формулу (11.1)).

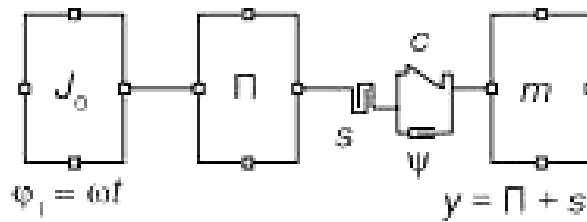


Рис. 11.1

Пусть  $w(t) = w_0 \cos \omega t$ , где  $w_0 = \Pi''_{\max} \omega^2$ , что отвечает гармоническому закону движения выходного звена без учета колебаний. В частности, такая функция положения с достаточной точностью отвечает перемещению ползуна кривошипно-ползунного механизма  $\Pi \approx r_0(1 - \cos \varphi_1)$ .

Для того чтобы придать результатам анализа более общий вид, перейдем к новой переменной, в качестве которой примем «безразмерное время»  $\varphi_1 = \omega t$ . Тогда уравнение (11.3) примет вид

$$\ddot{\bar{q}} + N^2(2\delta N^{-1}\dot{\bar{q}} + \bar{q})\Psi(\bar{q}) = \cos \varphi_1, \quad (11.4)$$

где  $N = k_0/\omega$ ,  $\delta \approx \psi/(4\pi)$ ; штрих отвечает производной по  $\varphi_1$ ;  $\bar{q} = q/r_0$  – безразмерная координата.

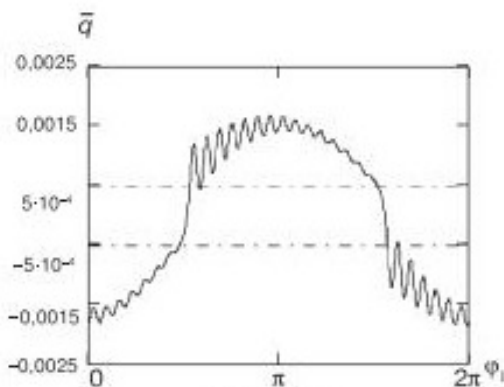


Рис. 11.2

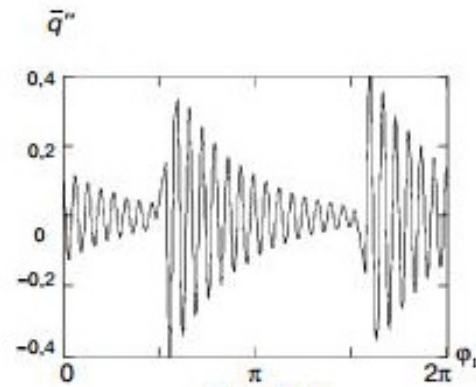


Рис. 11.3

На рис.11.2 приведен график  $\bar{q}(\varphi_1)$ , полученный решением уравнения (11.4) численным методом при  $N = 30$ ,  $\delta = 0,03$ ,  $\bar{s} = s/r_0 = 10^{-3}$ . Таким образом,

перекладка в зазоре происходит при  $-5 \cdot 10^{-4} < \bar{q} < 5 \cdot 10^{-4}$  (границы этого интервала показаны на графике штрих пунктирными линиями). На графике четко видно импульсное возбуждение колебаний после каждого перехода через зазор. Поскольку на рассматриваемом режиме после выборки зазора почти отсутствуют повторные соударения, частота колебаний равна  $k_0$ . Следовательно, в данном случае зазор практически не влияет на спектр собственных частот. Еще более наглядно это видно на графике функции  $\bar{q}''(\varphi_1)$ , которой пропорциональны силы инерции, возникающие при колебаниях (рис.11.3).

Совсем иная картина наблюдается при возникновении виброударных режимов. В качестве примера на рис.11.4 показан график  $\bar{q}(\varphi_1)$  при сохранении принятых выше исходных данных, но при полной динамической разгрузке и одиночном импульсном возбуждении.

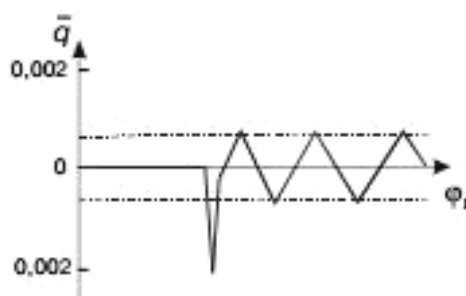


Рис. 11.4

В данном режиме частота колебаний  $k$  существенно ниже значения  $k_0$ . Для оценки частоты  $k$  в подобных случаях нередко используется метод гармонической линеаризации, согласно которому

$$k^2(A) \approx k_0^2[(1 - 4\Delta/(\pi A))],$$

где  $A$  – амплитуда колебаний.

Следует, однако, отметить, что данная формула может дать большую погрешность. Это связано с существенным отличием виброударного режима от гармонических колебаний. В подобных случаях более эффективным приемом оценки собственных частот является гармоническая линеаризация по силе. Впрочем, возможность возникновения подобных виброударных режимов должна быть исключена еще на стадии создания машины.

В связи с рассмотренным режимом представляет интерес отрицательный эффект от полной динамической разгрузки при наличии зазоров, который может быть устранен за счет приложения незначительной дополнительной силы

**Некоторые аналитические оценки и динамические критерии.** Согласно дифференциальному уравнению (11.3) будем различать две фазы движения. На *первой фазе* зазор выбран, следовательно, с точностью до постоянной  $y = \Pi(\varphi) + q$ ; на *второй фазе* – при переходе через зазор, выходное звено нахо-

дится в «свободном полете», что наглядно видно на рис.11.2. Определим уровень дополнительных колебаний, возбуждаемых при восстановлении кинематического контакта. При этом примем, что угол поворота входного звена  $\Delta\varphi_1 = \omega\Delta t_1$ , соответствующий зазору, мал. Это позволяет в первом приближении считать, что движение на данной фазе происходит с постоянной скоростью. Тогда

$$\Pi(\varphi_1^* + \Delta\varphi_1) + s = \Pi(\varphi_1^*) + \Pi'(\varphi_1^*)\Delta\varphi_1, \quad (11.5)$$

где  $\varphi_1^*$  – угол поворота входного звена при смене знака реакции в кинематической паре;  $s$  – величина зазора.

Далее, представляя функцию  $\Pi(\varphi_1^* + \Delta\varphi_1)$  в окрестности  $\varphi_1^*$  в виде усеченного ряда Тейлора, на основании (11.5) имеем

$$\frac{1}{6}\Pi_*'''\Delta\varphi_1^3 + \frac{1}{2}\Pi_*''\Delta\varphi_1^2 + s = 0. \quad (11.6)$$

Здесь  $\Pi_*''$ ,  $\Pi_*'''$  отвечают аргументу  $\varphi_1^*$ .

В современных высокоскоростных цикловых механизмах динамическая нагрузка, вызванная кинематическим возбуждением, обычно значительно превосходит силы сопротивления, поэтому переход через зазор практически происходит при  $\Pi_*'' = 0$ . Тогда согласно (11.6)

$$\Delta\varphi_1 = \sqrt[3]{6s/|\Pi_*''|}. \quad (11.7)$$

Здесь принято во внимание, что  $\Pi_*''' < 0$ .

При восстановлении кинематического контакта имеет место скачок первой передаточной функции  $\Delta\Pi'$ , который при учете (11.7) определяется следующим образом [2],[3\*]:

$$\Delta\Pi' = \sqrt[3]{4,5s^2|\Pi_*''|}. \quad (11.8)$$

Как было показано в п.6.2, при этом имеет место жесткий удар. Аналогичным образом могут быть учтены возмущения, связанные со скачками  $\Delta\Pi''$  и  $\Delta\Pi'''$ . Введем в рассмотрение параметр  $\xi = |\Delta y''|_{\max} / |\Pi''|_{\max}$ , равный отношению экстремума дополнительного ускорения (после выборки зазора) к экстремуму идеального ускорения. При одиночном ударе получаем

$$\xi = \Pi_*'''\sqrt{(4,5)^{2/3}\beta_1^4 N^2 + N^{-2}}, \quad (11.9)$$

где  $\beta_1 = \sqrt[3]{s/|\Pi_*''|}$ ,  $N = k_0/\omega$

Параметр  $\beta_1$  играет роль важного динамического критерия. На основании формулы (11.9) могут быть определены параметры системы, удовлетворяющие требованию  $\xi \leq \xi_*$ , где  $\xi_*$  – допускаемое значение уровня дополнительных ускорений, вызванных зазором. (Обычно  $\xi_* < 0,1 \div 0,2$ ).

На рис.11.5 представлено семейство кривых  $\xi(N, \beta_1)$  при  $\beta_1 = 10^{-3}$  (кривая 1),  $\beta_1 = 5 \cdot 10^{-4}$  (кривая 2),  $\beta_1 = 10^{-4}$  (кривая 3).

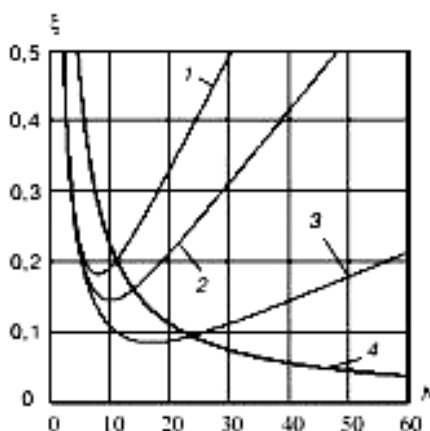


Рис. 11.5

Для исключения возможности возникновения виброударных режимов при выборке зазора очень важно устранение повторных соударений. График  $\bar{q}(\varphi)$  (см. рис.11.2) наглядно показывает, что повторные соударения могут возникнуть с некоторым фазовым сдвигом относительно угла  $\varphi_1^*$ , соответствующего разрыву кинематической связи при «входе» в зазор  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$ . Значение  $\Delta\varphi_1$  определяется формулой (11.7), а  $\Delta\varphi_2 \approx \Delta t_2 / \omega = \alpha N^{-1}$ , где интервал времени  $\Delta t_2$  соответствует первому минимуму функции  $\bar{q}$  после выборки зазора. Можно показать, что  $\alpha \approx 4,45 \div 6,28$ .

На основании (11.7)–(11.9) можно показать, что в первом приближении должно удовлетворяться условие [3\*]

$$\beta_2 = \beta_1 N^{-1} < 0,3 \exp(\delta\alpha) \left[ 1 + \sqrt{1 + 29,4 \exp(-\delta\alpha)} \right]. \quad (11.10)$$

В формуле (11.10) учтено демпфирование колебаний на малом отрезке времени  $\Delta t_2$ . Однако, как показывает анализ,  $\exp(\delta\alpha) \approx 1$ . Тогда  $\beta_2 < \beta_2^*$ , где  $\beta_2^* \approx 1,9$ . На рис.11.5 этому условию отвечают точки, расположенные ниже кривой 4.

**Разрывы кинематической цепи в механизмах с силовым замыканием.** Силовое замыкание, как известно, используется для обеспечения контактов элементов кинематических пар и исключения ударов из-за зазоров. Если динамические нагрузки преобладают над остальными, то силовое замыкание обеспечивается при соблюдении условия  $F_{\text{зам}} = \zeta |P^{\text{И}}|_{\text{max}}$ , где  $|P^{\text{И}}|_{\text{max}}$  – сила инерции в зоне экстремальных ускорений на выбеге выходного звена;  $F_{\text{зам}}$  – замыкающая сила;  $\zeta > 1$  – коэффициент запаса.

При учете колебаний оказывается, что увеличение  $F_{\text{зам}}$  не сопровождается пропорциональным ростом коэффициента запаса  $\zeta$ , а при определенных условиях может даже привести к обратному эффекту. Причина этого, на первый взгляд, парадоксального эффекта связано со специфическим проявлением нестационарной кинематической связи, осуществляемой в цикловом механизме. Увеличивая постоянную составляющую замыкающего усилия  $F_0$ , мы тем самым повышаем переменный момент  $M_0 = \Pi' F_0$  ( $\Pi' \neq \text{const}$ ), воздействующий на входное звено, который вызывает дополнительные крутильные колебания привода. Эти колебания, в свою очередь, могут привести к росту силы инерции  $P^И$ . При этом, если интенсивность увеличения  $P^И$  выше, чем у замыкающего усилия  $F_0$ , то коэффициент запаса  $\zeta$  будет уменьшаться. Это означает, что при разрывах кинематической цепи ( $\zeta < 1$ ) попытка восстановить условие  $\zeta > 1$  за счет увеличения замыкающей силы будет безуспешной, а система замыкания полностью лишится чувствительности к монтажным и эксплуатационным регулировкам, т.е. по сути дела окажется неуправляемой.

Отмеченный эффект не может быть устранен изменением параметров замыкающего устройства. Как показано в [2],[3] для обеспечения надежной работы системы замыкания коэффициент крутильной жесткости привода должен в первом приближении удовлетворять условию

$$c > 30 |\Pi''|_{\text{max}} \zeta P_0^И,$$

где  $P_0^И$  – идеальная сила инерции выходного звена в момент возможного разрыва кинематической цепи.

### 11.3. Условия кинематического контакта в шарнирах рычажных механизмов

Обратимся к кинематической схеме рычажного механизма, показанного на рис.11.6, в которой учтены зазоры в шарнирах  $A$  и  $B$ .

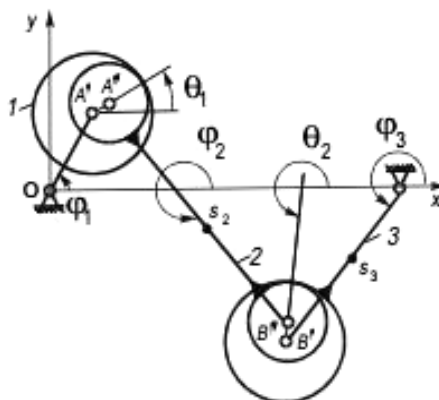


Рис. 11.6

Очевидно, что отсутствие нарушений кинематического контакта возможно при обкатке шарнира по внутренней поверхности цилиндрической опоры. В этом случае без учета податливости шарниров зазоры соответствуют безмассовым звеньям  $A'A'' = \Delta_A$ ,  $B'B'' = \Delta_B$ , длины которых равны половине зазора  $s_{A,B}$ . При отсутствии зазоров механизм имеет одну степень свободы, которой соответствует обобщенная координата  $\varphi_1$ . При наличии зазора и отсутствии кинематического размыкания число степеней свободы возрастает до трех. Пусть углы  $\theta_{1*}$  и  $\theta_{2*}$ , характеризующие положение безмассовых звеньев  $A'A''$  и  $B'B''$ , соответствуют направлениям реакций в шарнирах  $R_{A,B}^*$ , полученным на базе кинетостатического анализа механизма. Нередко используемое допущение  $\theta_i \approx \theta_{i*}$  может привести к неверным выводам. Действительно, принудительная фиксация углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  означала бы, что механизм по-прежнему имеет одну степень свободы; однако, тем самым игнорируются две дополнительные степени свободы.

Безмассовые звенья соответствуют длинам некоторых маятников, поэтому при отклонении от центрированных положений  $\theta_{1*}$  и  $\theta_{2*}$  возникает восстанавливающая сила, соответствующая в линейном приближении следующему коэффициенту жесткости в тангенциальном направлении:

$$(c_{A,B}^{\tau})_1 = |R_{A,B}^*| / \Delta_{A,B}. \quad (11.11)$$

Далее учтем жесткость пальцев шарниров в нормальном направлении. При этом число степеней свободы равно пяти, но, поскольку  $\varphi_1$  – циклическая координата, то число степеней свободы колебательной системы, а следовательно, и число собственных частот, равно четырем. Как показывает анализ, коэффициенты жесткости шарнира в основном определяются изгибной податливостью пальцев  $c_{A,B}^n = (c_{A,B}^{\tau})_2$ . При этом изгибная тангенциальная жесткость  $(c_{A,B}^{\tau})_2$  и «маятниковая» жесткость  $(c_{A,B}^{\tau})_1$  образует последовательное соединение. При учете (11.11) имеем

$$c_{A,B}^{\tau} = c_{A,B}^n |R_{A,B}^*| / (c_{A,B}^n \Delta_{A,B} + |R_{A,B}^*|). \quad (11.12)$$

Пусть  $\theta_i = \theta_i^* + \Delta\theta_i$ , где  $\theta_i^*(\varphi_1)$  отвечает медленно меняющейся составляющей, реализуемой при  $s = 0$ , а  $\Delta\theta_i$  – быстрой составляющей, определяемой при решении соответствующей системы дифференциальных уравнений с учетом (11.12). (Подробнее см. [5\*]).

Как показывает анализ, зазоры могут существенным образом изменить спектр «собственных» частот  $k_r(\varphi_1)$ . На рис.11.7 приведены нормированные значения функции  $\eta_1(\varphi_1) = k_1(\varphi_1) / \omega$  для низшей частоты ( $r = 1$ ). При этом кривая 1 соответствует  $s = 0$ , а кривая 2 –  $s \neq 0$ . (Для получения сопоставимых ре-

зультатов при варьировании параметров системы было использовано нормированное значение  $N_0 = k_0 / \omega$ , где  $k_0$  – усредненное значение низшей частоты при  $s = 0$ .)

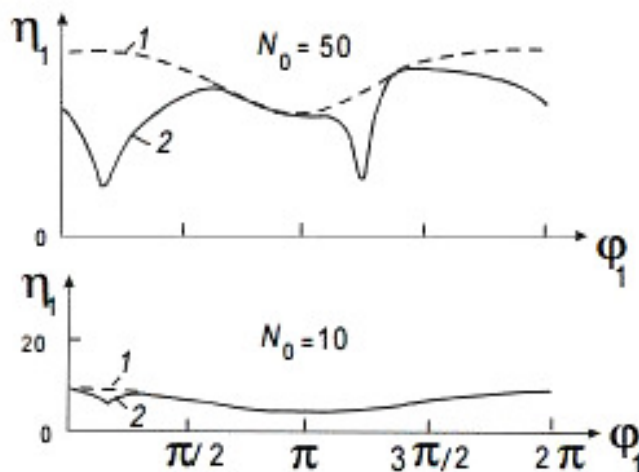


Рис. 11.7

Анализ изменения «собственных» частот при фиксированных инерционных характеристиках позволяет сделать следующие выводы:

- максимальные значения низшей частоты определяется в основном упругими свойствами шарниров;
- минимальные значения низшей частоты при реальных величинах зазоров слабо зависят от упругих свойств шарнира и с достаточной точностью определяются на базе «жесткого» механизма:  $k_{1\min} \approx \sqrt{2R_{\min}^* / (sm)}$ , где  $m$  – приведенная масса.
- При больших значениях  $N_0 > 25 \div 50$  имеет место существенное влияние зазора на пульсацию низшей «собственной» частоты, в то время как при  $N_0 \leq 10 \div 15$  влияние зазора на частотный спектр мало.

Как показано в п.7.4 при резких изменениях  $k(\varphi_1)$  возможны нарушения условий динамической устойчивости на конечном отрезке кинематического цикла, которые сопровождаются чередованием зон нарастания и убывания амплитуд (см. рис. 7.6). При этом наблюдается динамический эффект, близкий по воздействию к удару («псевдоудар»). Для устранения этого эффекта следует увеличить отток энергии, что реализуется при соблюдении следующего условия, обеспечивающего затухающий характер виброускорений:

$$\lambda_r > \lambda_r^*(\varphi_1) = 3\pi\eta_r^{-2} (d\eta_r / d\varphi_1), \quad (11.13)$$

где  $\lambda_r$  – логарифмический декремент, соответствующий форме  $r$  (см. п.9.1).  $\varphi_1$

Графики критических значений  $\lambda_r^*(\varphi_1)$  приведены на рис.11.8.

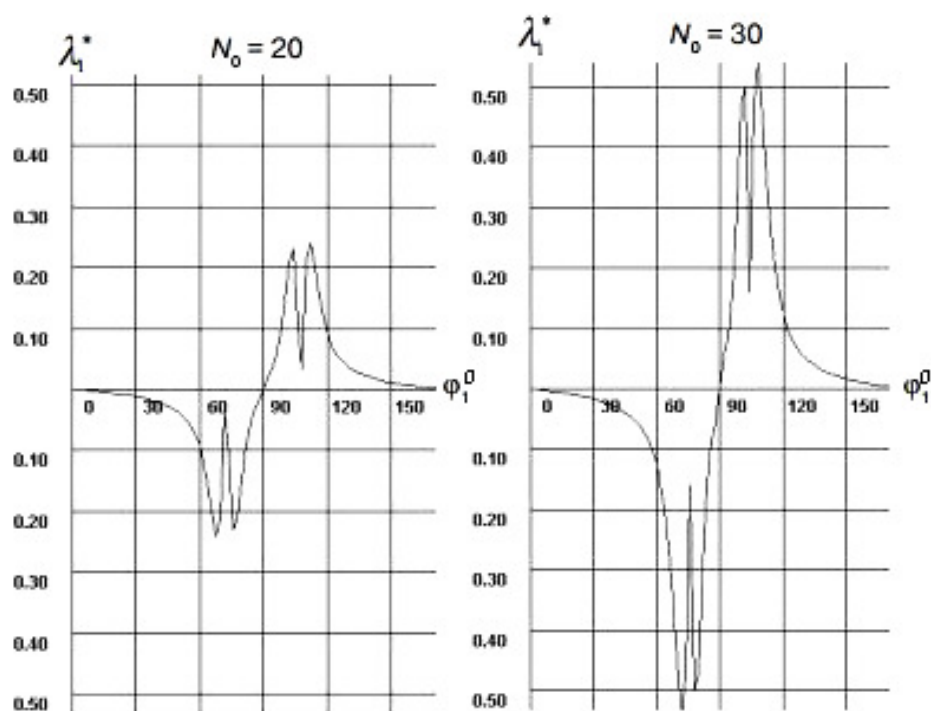


Рис. 11.8

При относительно большой длительности интервала времени, отвечающего неустойчивому состоянию системы, псевдудар приводит к размыканию кинематической цепи, т.е. к ударам.

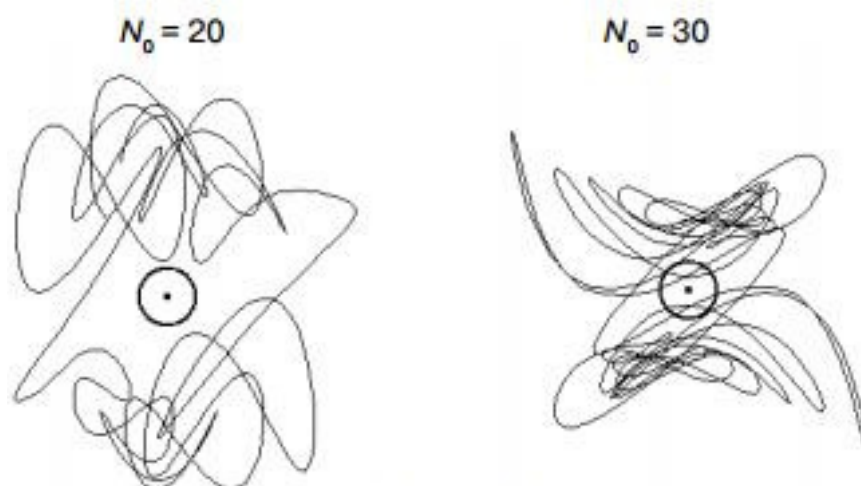


Рис. 11.9

На рис.11.9 переход от псевдудара к удару иллюстрируется компьютерным моделированием двух режимов при  $N_0 = 20$ ,  $N_0 = 30$  и  $\lambda_1 = 0,2$ . Окружность с радиусом, равным  $\Delta$ , выделенная жирной кривой, соответствует траектории точки контакта в шарнире «жесткого» механизма, а окружающие кривые – суммарному эффекту, связанному с деформациями при колебаниях. В первом случае кривые «обрамляют» окружность, что свидетельствует об отсутствии

кинематического размыкания (псевдоудар). Во втором случае кривые пересекают круг, что указывает на ударный характер взаимодействия элементов шарнира. Легко заметить, что на графиках  $\lambda_1^*(\varphi_1)$  (см. рис.11.8) в первом случае условие (11.13) практически удовлетворяется, в то время как во втором – это условие при заданном значении  $\lambda_1 = 0,2$  нарушается на достаточно большом участке кинематического цикла.

## ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ

**Звено** – твердое тело, входящее в состав механизма.

**Стойка** – звено, принимаемое за неподвижное.

**Входное звено** – звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемое движение других звеньев.

**Выходное звено** – звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

**Обобщенные координаты механической системы** – независимые между собой координаты, однозначно определяющие положение механической системы.

**Число степеней свободы механической системы** – число обобщенных координат.

**Обобщенная скорость** – производная по времени от обобщенной координаты.

**Механизм** – связанная система тел (звеньев), предназначенная для преобразования движения одного или нескольких из этих тел в требуемое движение других тел и образующая кинематическую цепь, в которой одно из звеньев является стойкой, а число входных звеньев равно числу степеней свободы относительно стойки (степень подвижности).

**Машина (машинный агрегат)** – устройство, предназначенное для осуществления механических движений и силовых воздействий с целью выполнения технологических и транспортных операций, а также преобразования энергии, материалов и информации.

**Возможное перемещение материальной точки** – любое допускаемое наложенными связями перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение.

**Возможные перемещения механической системы** – любая совокупность возможных перемещений материальных точек данной механической системы, допускаемых всеми наложенными на нее связями.

**Идеальные связи** – связи, для которых сумма элементарных работ их реакций равна нулю на любом возможном перемещении механической системы (при удерживающих связях).

**Обобщенная сила** – величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на механическую систему.

**Кинетическая энергия материальной точки** – скалярная мера механического движения материальной точки, равная половине произведения ее массы на квадрат ее скорости.

**Кинетическая энергия механической системы** – величина, равная сумме кинетических энергий всех материальных точек, образующих систему.

**Потенциальная энергия материальной точки** – величина, равная работе, которую произведет сила, действующая на материальную точку, находящуюся в потенциальном силовом поле, при перемещении этой точки из данного положения в положение, для которого значение потенциальной энергии условно считается равным нулю.

**Потенциальная энергия механической системы** – величина, равная сумме потенциальных энергий всех точек механической системы.

**Функция положения звена** – зависимость координаты звена от координаты входного звена или координат входных звеньев.

**Функция положения механизма** – функция положения выходного звена механизма.

**Первая геометрическая передаточная функция (аналог скорости)** – производная функции положения по координате входного звена (для механизмов с одной степенью подвижности).

**Вторая геометрическая передаточная функция (аналог ускорения)** – вторая производная функции положения по координате входного звена (для механизмов с одной степенью подвижности).

**Динамический анализ механизма** – определение сил по заданному движению звеньев (*первая задача динамики*) или определение движения звеньев по заданным силам (*вторая задача динамики*).

**Динамический синтез механизма** – определение и выбор параметров механизма, отвечающих требуемым динамическим характеристикам.

**Приведенная сила или момент** – обобщенная сила, отвечающая координате звена приведения.

**Кинетическая энергия механизма** – кинетическая энергия всех звеньев механизма (машины).

**Установившееся движение машины** – движение, при котором кинетическая энергия является периодической функцией времени.

**Цикл установившегося движения** – период изменения кинетической энергии.

**Механические колебания** – движение механической системы, при котором обобщенные координаты и (или) обобщенные скорости поочередно возрастают и убывают во времени.

**Периодические колебания** – колебания, при которых состояние системы повторяется через равные промежутки времени. Состояние системы характеризуется обобщенными координатами и их производными.

**Гармонические колебания** – колебания, при которых обобщенная координата или ее производная во времени изменяется пропорционально функции синусу (косинусу) с аргументом, линейно зависящим от времени.

**Амплитуда гармонических колебаний** – наибольшее отклонение гармонического колебательного процесса от среднего его значения.

**Фаза гармонических колебаний** – аргумент функции, описывающей гармонические колебания.

**Начальная фаза** – значение фазы гармонических колебаний в начальный момент времени.

**Сдвиг фаз** – разность фаз двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами.

**Круговая частота** – производная фазы гармонических колебаний во времени,  $\text{с}^{-1}$ .

**Частота** – число колебаний в секунду, Гц. (Частота в Гц в  $2\pi$  раз меньше круговой частоты).

**Период** – наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяется состояние системы.

**Свободные колебания** – колебания, происходящие без переменного внешнего воздействия и поступления энергии извне. Свободные колебания происходят за счет энергии, подведенной в начальный момент времени из-за начальных условий (начального отклонения от положения равновесия и начальной скорости).

**Вынужденные колебания** – колебания, вызванные и поддерживаемые силовым или кинематическим возбуждением. При **силовом возбуждении** к системе приложена переменная сила, зависящая от времени. При **кинематическом возбуждении** какая-либо точка или сечение принудительно перемещается по заданному закону движения.

**Параметрические колебания** – колебания, вызванные и поддерживаемые изменением во времени одного или нескольких параметров системы (приведенной массы, приведенного момента инерции, коэффициента жесткости и др.).

**Автоколебания** – установившиеся колебания, которые возникают в системе при неколебательном источнике энергии или источнике энергии с существенно отличающейся частотой и регулируются движением самой системы.

**Линейные колебания** – колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями.

**Нелинейные колебания** – колебания, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

**Собственная частота** – каждая из частот свободных колебаний линейной колебательной системы.

**Коэффициент формы** – соотношение амплитуд свободных колебаний при фиксированной собственной частоте.

**Декремент колебаний** – отношение амплитуд затухающих свободных колебаний, разделенных одним периодом.

**Логарифмический декремент** – абсолютная величина натурального логарифма от отношения амплитуд свободных затухающих колебаний, разделенных одним периодом.

**Амплитудно-частотная характеристика, АЧХ (резонансная кривая)** – зависимость амплитуды гармонических вынужденных колебаний от частоты гармонического силового или кинематического возбуждения.

**Фазо-частотная характеристика, ФЧХ** – зависимость сдвига фаз между гармоническими вынужденными колебаниями и гармоническим возбуждением от его частоты.

**Статическая амплитуда** – деформация упругой системы под действием амплитудного значения вынуждающей силы, приложенной в статических условиях.

**Коэффициент динамичности при силовом возбуждении** – отношение амплитуды вынужденных колебаний к статической амплитуде.

**Коэффициент частотной расстройки** – отношение частоты гармонического возбуждения к собственной частоте колебательной системы с одной степенью свободы.

**Коэффициент динамичности при кинематическом возбуждении** – отношение амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде гармонического кинематического возбуждения.

**Безразмерная форма АЧХ** – зависимость коэффициента динамичности от коэффициента частотной расстройки.

**Гармоника** – каждая составляющая периодических колебаний или периодической силы, представленных в виде ряда Фурье.

**Резонанс** – вынужденные колебания, соответствующие одному из максимумов амплитудно-частотной характеристики.

**Антирезонанс** – вынужденные колебания, соответствующие одному из минимумов амплитудно-частотной характеристики.

**Биения** – колебания, являющиеся результатом сложения двух гармонических колебаний с близкими значениями частот.

**Частота параметрического возбуждения** – частота изменения параметра.

**Период параметрического возбуждения** – период изменения параметра.

**Глубина пульсации** – отношение амплитудного значения переменной составляющей параметра к среднему значению этого параметра.

**Параметрический резонанс** – нарастание амплитуд колебаний в линейной колебательной системе, связанное с потерей динамической устойчивости в окрестности определенных частот параметрического возбуждения.

**Критическое значение глубины пульсации** – значение глубины пульсации, ниже которого обеспечивается подавление параметрического резонанса.

**Фазовая плоскость** – декартова система координат, в которой по оси абсцисс отложена обобщенная координата, а по оси ординат – обобщенная скорость.

**Изображающая точка** – точка на фазовой плоскости.

**Фазовая траектория** – геометрическое место изображающих точек, соответствующих последовательным моментам времени.

**Фазовой портрет** – совокупность фазовых траекторий, свойственных данной системе.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

### К главе 1

1. Какие цели преследует изучение колебаний в машинах?
2. Охарактеризуйте основные этапы динамического расчета.
3. Приведите классификацию колебаний по кинематическим признакам.
4. Приведите классификацию колебаний по виду возбуждения.
5. Приведите классификацию колебаний по виду деформаций.
6. Приведите классификацию колебаний по виду динамической и математической моделей.

### К главе 2

1. Что понимают под динамической моделью и числом ее степеней свободы?
2. Из каких принципов исходят при построении динамических моделей с конечным числом степеней свободы?
3. Приведите примеры разновидности динамических моделей приводов машин.
4. Из чего следует исходить при приведении инерционных и упругих характеристик моделей?
5. Как определяется приведенный коэффициент жесткости при параллельном и последовательном соединениях упругих элементов?
6. Что определяет коэффициент рассеяния и логарифмический декремент?

### К главе 3

1. Выразите кинетическую и потенциальную энергии системы при малых колебаниях в виде квадратичных форм.
2. При каком условии положение равновесия системы является устойчивым?
3. Приведите систему дифференциальных уравнений малых колебаний с использованием инерционных и квазиупругих коэффициентов.
4. На чем основан обратный способ составления систем дифференциальных уравнений малых колебаний?

### К главе 4

1. Чему равна собственная частота и период свободных колебаний

системы с одной степенью свободы?

2. В чем проявляется влияние линейной силы сопротивления на свободные колебания?
3. В чем проявляется влияние постоянной силы сопротивления (кулонова трения) на свободные колебания?
4. Как определяются собственные частоты системы с двумя степенями свободы?
5. Что определяют коэффициенты формы?
6. Что такое парциальные частоты?
7. От чего зависит число собственных частот колебательной системы?
8. С какой целью осуществляется переход к нормальным (главным) координатам?

## **К главе 5**

1. Что представляет собой режим биений?
2. Проанализируйте график коэффициента динамичности в зависимости от коэффициента частотной расстройки.
3. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний и резонансная амплитуда?
4. На какую величину отличается фаза вынужденных колебаний от фазы гармонической вынуждающей силы?
5. Что такое кинематическое возбуждение? В чем состоит отличие АЧХ при кинематическом возбуждении?
6. Какие известны способы расчета вынужденных колебаний при периодической вынуждающей силе?
7. Когда наступает резонанс при действии периодической вынуждающей силы?
8. Что такое самоцентрирование? Какую угловую скорость вращения вала называют критической?
9. Каким образом используются условия энергетического баланса при анализе колебательных режимов?
10. Каким образом колебательные процессы отображаются на фазовой плоскости?

**К главе 6**

1. Какие известны способы виброзащиты?
2. Как влияют разрывы непрерывности геометрических характеристик механизма на ускорения выходного звена?
3. Сформулируйте рекомендации при выборе законов программного движения.
4. Как следует рациональным образом изменять параметры системы ? в дорезонансном и зарезонансном режимах?
5. В чем состоит виброизоляция и каким образом она осуществляется?
6. На чем основан эффект динамического гашения?
7. Каким образом осуществляется динамическая разгрузка?

**К главе 7**

1. Приведите примеры динамических моделей с переменными параметрами.
2. Охарактеризуйте параметрический резонанс и приведите способы его подавления.
3. В чем состоят основные отличия параметрического резонанса от резонанса при вынужденных колебаниях.

**К главе 8**

1. Перечислите основные источники нелинейностей.
2. На чем основан метод гармонической линеаризации?
3. Приведите графики и проанализируйте АЧХ при нелинейных колебаниях.
4. Какова структура автоколебательной системы?
5. Какие существуют виды автоколебаний?
6. Какие различаются случаи выхода на режим автоколебаний с позиций энергетического баланса?
7. Отчего возникают фрикционные автоколебания?
8. Каким образом можно устранить остановки рабочих органов, вызванные фрикционными автоколебаниями?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная литература

1. **Бидерман В.Л.** Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
2. **Вульфсон И.И.** Динамические расчеты цикловых механизмов. – Л.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
3. **Вульфсон И.И.** Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
4. **Вульфсон И.И.** Колебания в машинах: Учеб. пособие. для вузов. 3-ье изд. – СПб.: изд-во СПГУТД, 2008. – 260 с.
5. **Коловский М.З.** Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
6. **Мандельштам Л.И.** Лекции по теории колебаний – М.: Наука, 1972. – 470 с.
7. **Механика машин:** Учеб. пос. для вузов / И.И. Вульфсон, М.З. Коловский, Э.Е. Пейсах и др.; под ред. Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.
8. **Теория механизмов и машин:** Учеб. для вузов / Под ред. К.В. Фролова. 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2005. – 496 с.
9. **Пановко Я.Г.** Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
10. **Семенов Ю. А.** Механика. Теория механических колебаний: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 412 с.

### Дополнительная литература

- 1\* **Блехман И.И.** Теория вибрационных процессов и устройств. – СПб : Изд-во «Руда и металлы» , 2013. – 640 с.
- 2\* **Вейц В.Л.** Динамика машинных агрегатов. – Л.: Машиностроение, 1969. – 370 с.
- 3\* **Вибрации в технике:** Справочник. – М.: Машиностроение, 1995. Т.6. – 456 с.
- 4\* **Вульфсон И.И.** Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника. – 417 с.
- 5\* **Вульфсон И.И.** Квазистационарность динамических режимов в цикловых механизмах, образующих реономные колебательные системы с решетчатой структурой // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2015, №3.– С. 12 – 22.

- 6\*. **Вульфсон И.И., Коловский М.З.** Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 281 с.
- 7\*. **Диментберг Ф.М., Фролов К.В.** Вибрации в технике и человек. – М.: Знание, 1987. – 160 с.
- 8\*. **Динамика машин и управление машинами:** Справочник / В.К. Асташев, В.И. Бабицкий, И.И. Вульфсон и др. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
- 9\*. **Кобринский А.Е.** Механизмы с упругими связями. – М.: Наука, 1964. – 390 с.
- 10\*. **Коритыцкий Я.И.** Колебания в текстильных машинах. – М.: Машиностроение, 1973. – 320 с.
- 11\*. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
- 12\*. **Нелинейные задачи динамики и прочности /** Под ред. В.Л. Вейца. – Л.: ЛГУ, 1983. – 336 с.
- 13\*. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
- 14\*. **Пановко Я.Г., Губанова И.И.** Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
- 15\*. **Полюдов А.Н.** Программные разгрузжатели цикловых механизмов. – Львов: Вища школа, 1979. – 168 с.
- 16\*. **Сорокин Е.С.** Динамический расчет несущих конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958. – 325 с.

## Short course of the vibrations theory

---

In this textbook the traditional course of oscillations theory is supplemented with basic information on the principles for creation of dynamic models of mechanisms and machine's drives, their mathematical description and calculation methods for typical vibrational regimes. In concise manner set out ways of vibration protection and rational methods of dynamic synthesis taking into account the inertial and elastic-dissipative characteristics. Some high complexity problems will be dealt for engineering calculations and design of mechanisms that forming vibrating systems with non-stationary and non-linear constraints.

The textbook is intended for students of technical colleges and may be useful in the preparation of bachelors, masters and postgraduates of relevant specialties, engineers as well as for training the teachers on theory of the mechanisms and machines.

Printed in authors' edition.

---

I.I. Vulfson Short course of the vibrations theory //— Moscow: VNTR, 2017. — 241 p.p.



Moscow

2016

**Учебное сетевое издание**  
**Иосиф Исаакович Вульфсон**

**Краткий курс теории механических колебаний**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Файл книги подготовлен автором при участии редакции  
журнала «Вестник Научно-Технического Развития»**



**Москва, 2017**