

Вводный курс

Ю. Ю. Тарасевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Дифференциальные
модели

Стохастические
и детерминистические
модели



UPCC

Ю. Ю. Тарасевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



UPCC

Ю. Ю. Тарасевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И КОМПЬЮТЕРНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Вводный курс

Допущено Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
030100 Информатика

Издание четвертое, исправленное



**УРСС
МОСКВА**

Тарасевич Юрий Юрьевич

Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс: Учебное пособие. Изд. 4-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 152 с.

ISBN 5–354–00913–8

В первой части автор на примерах из физики, химии, экологии показывает, как составляют и анализируют дифференциальные модели. Таким образом, первая часть является введением в качественные методы исследования дифференциальных уравнений. Вторая часть посвящена задачам, когда качественный анализ затруднен или невозможен и требуется прямое компьютерное моделирование процесса. Здесь рассматриваются системы, проявляющие хаотическое поведение, клеточные автоматы, задачи перколяции и кинетического роста и некоторые другие. В приложении приводятся примеры исследования динамической системы с помощью различных инструментальных средств (Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad) и даются начальные сведения об алгоритмах генерации случайных чисел.

Изложение подкрепляется значительным количеством иллюстративного материала и в большинстве случаев достаточно подробными математическими выкладками. В то же время ряд примеров несомненно предполагает и большую самостоятельную работу студентов по составлению компьютерных программ и анализу полученных результатов.

Данная книга может быть использована в качестве учебного пособия по курсам «Компьютерное моделирование» для студентов, обучающихся по специальности «Информатика», а также при изучении курса «Концепции современного естествознания (математические модели естествознания и экологии)» студентами естественно-математических специальностей.

Рецензенты:

кафедра математического моделирования
Воронежского государственного университета
(заведующий кафедрой — доктор физико-математических наук,
профессор *В. А. Костин*);

доктор физико-математических наук, профессор *Г. Ю. Ризниченко*
(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

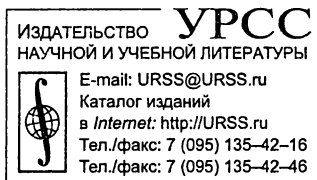
Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 05.10.2004 г.
Формат 60 × 90/16. Тираж 1200 экз. Печ. л. 9,5. Зак. № 3-1581/751.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5–354–00913–8

© Ю. Ю. Тарасевич, 2001, 2004

© Едиториал УРСС, 2004



2770 ID 23861



Оглавление

Предисловие	7
Введение	8
Часть I	
Дифференциальные модели	13
Глава 1. Качественная теория динамических систем	14
§ 1. Маятник	14
1.1. Движение маятника вблизи положения устойчивого равновесия	15
1.2. Приведение уравнений к безразмерному виду	17
1.3. Движение маятника вблизи положения неустойчивого равновесия	18
1.4. Точное решение задачи о маятнике	21
§ 2. Маятник с затуханием	23
§ 3. Качественное исследование динамических систем	28
§ 4. Сводка результатов	33
Глава 2. Динамика биологических популяций	36
§ 1. Модель Мальгуса	36
§ 2. Логистическое уравнение	37
§ 3. Модель Вольтерра	39
§ 4. Модификации модели Вольтерра	43
§ 5. Межвидовая конкуренция	43
Глава 3. Колебательные процессы в химии	50
§ 1. Затухающие колебания	50
§ 2. Незатухающие колебания	53

Глава 4. Предельные циклы и автоколебания	54
§ 1. Предельные циклы	54
1.1. Вводные примеры	54
1.2. Классификация предельных циклов	58
§ 2. Автоколебания в физических, химических и биологических системах	60
2.1. Качественное рассмотрение автоколебательных систем	61
2.2. Количественное рассмотрение автоколебаний	62
Глава 5. Самоорганизация и образование структур	73
§ 1. Распределенные системы	73
§ 2. Брюсселятор	75
Глава 6. Фракталы	79
§ 1. Фракталы в математике	80
§ 2. Размерности	84
2.1. Размерность самоподобия	84
2.2. Размерность по Хаусдорфу—Безиковичу	85
§ 3. Фракталы в природе	86
Глава 7. Хаотическое поведение динамических систем	88
§ 1. Дискретный аналог уравнения Ферхюльста	89
§ 2. Универсальность Фейгенбаума	90
§ 3. Другие отображения	92
§ 4. Система уравнений Лоренца	93
§ 5. Аттрактор Ресслера	95
§ 6. Неавтономная система	95

Часть II

Стохастические и детерминистические модели 101

Глава 8. Теория перколяции 102

 § 1. Введение 102

 § 2. Немного терминологии 105

§ 3. Критические показатели и масштабная инвариантность	108
§ 4. Алгоритм Хошена—Копельмана	109
Глава 9. Моделирование роста дендритов	113
§ 1. Ограниченная диффузией агрегация	113
§ 2. Электрический пробой диэлектрика	115
Глава 10. Клеточные автоматы	116
§ 1. Игра «Жизнь»	116
§ 2. Модель Винера—Розенблюта	118
§ 3. Модель Ва-Тор	119
Глава 11. Модель Изинга	123
§ 1. Алгоритм Метрополиса	124
§ 2. Задача о коммивояжере	125
§ 3. Распознавание образов	126
Глава 12. Генетические алгоритмы	128
Часть III	
Приложения	131
Приложение А. Инструментальные средства для исследования динамических систем	133
А.1. Исследование динамической системы с использованием пакета Mathematica	133
А.2. Исследование динамической системы с использованием пакета Maple	135
А.3. Исследование динамической системы с использованием пакета Matlab	138
А.4. Исследование динамической системы с помощью Simulink	138
А.5. Исследование динамической системы с использованием пакета Mathcad	141

Приложение В. Генерация случайных чисел на компьютере . . .	143
В.1. Линейный конгруэнтный генератор	144
В.2. Мультипликативный конгруэнтный алгоритм	145
В.3. Генератор на основе сдвига регистра	146
Заключение	147
Литература	148

Предисловие

Данное пособие подготовлено на основании опыта чтения лекционного курса и проведения лабораторных занятий. Предполагается, что весь теоретический материал будет закреплен на практических занятиях. Особенно это относится к последним темам, когда аналитические оценки поведения моделей невозможны и требуется их анализ путем проведения вычислительного эксперимента.

Моделирование — неотъемлемая часть научной деятельности. Области приложения моделирования столь широки и разнообразны, что любая книга, посвященная этой теме, заведомо обречена быть неполной и односторонней. Тем, кто после изучения данной книги всерьез заинтересуется математическим моделированием, можно порекомендовать книги из приводимого списка дополнительной литературы.

Отбор материала, вошедшего в пособие, обусловлен, с одной стороны, требованиями к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы подготовки учителя информатики по специальности 030100 «Информатика», а с другой стороны — личными научными интересами автора. Являясь по образованию и сфере научных интересов специалистом в области вычислительной физики, я ограничил круг рассматриваемых вопросов только проблематикой естественных наук. О том, как методы компьютерного моделирования применяются в области истории, демографии и других сферах гуманитарного знания можно прочитать в книгах из списка дополнительной литературы.

Введение

Что такое математическое моделирование?

Преподаватель:

Что мы должны учитывать, когда рассматриваем движение автомобиля?

Студент:

Квантовые и релятивистские эффекты.

Студенческая шутка

Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Математическое моделирование — метод познания, прогнозирования, управления.

Обычно различают следующие типы математических моделей.

1. Прямая задача, когда по заданным локальным законам (физическим, химическим, биологическим, экономическим и т. д.), действующим внутри исследуемой системы, нужно ответить на вопрос, как будет вести себя система в целом. В этом случае все параметры исследуемой системы известны и изучается поведение модели в различных условиях.
2. Обратная задача — определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. Очень часто реальные процессы, протекающие в исследуемом объекте, не известны, но имеются косвенные наблюдения. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта, и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче требу-

ется определить значения параметров модели по известному поведению системы как целого.

3. Проектирование управляющих систем. Это совершенно особая область моделирования, которая имеет дело с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления.

Построение математической модели состоит из нескольких этапов:

- 1) формулировка законов, связывающих основные объекты модели;
- 2) исследование математической задачи;
- 3) проверка, удовлетворяет ли модель критерию практики;
- 4) анализ модели и ее модификация.

Этапы изучения математической модели:

Создание качественной модели. На этом этапе выясняется характер законов и связей, действующих в системе. В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими и т. д. Из всего многообразия взаимодействий в системе необходимо выделить главные, определяющие. Не следует требовать от модели, чтобы она описывала все. Задача моделирования — выявить главные характерные черты поведения, его определяющие особенности. В связи с этим при построении модели следует учитывать только наиболее сильные эффекты. Очевидна нелепость предложения учитывать релятивистские и квантовые эффекты при рассмотрении движения автомобилей: эти эффекты просто не могут быть замечены. Однако далеко не всегда при построении модели ситуация столь очевидна.

Создание математической модели. На этом этапе наши представления о том, что же происходит в системе обретают математическую формулировку. Математическое выражение изучаемых процессов может быть и системой уравнений, и дифференциальным уравнением, и набором правил.

Если модель описывается дифференциальными уравнениями, то такая модель называется *дифференциальной*. Вообще, если модель описывается некоторыми уравнениями, то говорят, что модель *детерминированная*. В том случае, когда модель описывается некоторыми вероятностными законами, то говорят, что модель *стохастическая*. В дальнейшем мы ограничимся, в основном, только двумя вариантами математических моделей: дифференциальными моделями и моделями, в которых действуют некоторые статистические закономерности. Следует отдавать себе отчет, что это только малая часть моделей, возникающих при исследовании разных явлений.

Формулировка подходящей математической модели исследуемой проблемы включает в себя несколько подзадач.

1. Выделение, существенных факторов. С одной стороны, модель должна быть достаточно простой, с другой стороны, достаточно точной. Какие факторы являются существенными, а какими можно пренебречь, зависит от особенностей решаемой задачи. Пожалуй, можно дать только единственную рекомендацию: если в системе действует несколько факторов одного порядка значимости, то все они должны быть учтены или все отброшены.
2. Выяснение начальных, граничных, дополнительных условий.

Изучение математической задачи. На этом этапе проводится качественное исследование модели. Выясняется ее поведение в крайних и предельных ситуациях. Очень часто такие экстремальные ситуации допускают аналитическое решение (хотя бы приближенное). Полученные результаты позволяют предугадать поведение системы в общем случае, а также служат для проверки результатов, полученных в результате вычислений.

Разработка алгоритма. Очень часто полученная математическая задача не может быть решена аналитическими методами в общем случае, тогда модель исследуется численно, проводится компьютерный эксперимент. Для ряда часто встречающихся задач разработаны высокоэффективные алгоритмы. Однако

во многих случаях разрабатывать алгоритм приходится заново, исходя из особенностей решаемой задачи.

Создание и реализация программы.

Вывод и накопление результатов. На этом этапе происходит также обоснование модели, т. е. подтверждение того, что полученное решение является разумным и достаточно точным. Для этого проводится сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа. Если результаты неудовлетворительны, то проводится модификация модели.

Использование полученных результатов.

Сегодня термины математическое моделирование и компьютерное моделирование стали почти синонимами. Действительно, большинство математических моделей требует проведения расчетов на компьютере или, как часто говорят, *компьютерных экспериментов*. С другой стороны, любые вычисления возможны только на основе некоторой математической модели. Существует много общего между проведением натурального и компьютерного эксперимента.

Лабораторный эксперимент	Компьютерный эксперимент
Образец	Математическая модель
Физический прибор	Программа
Калибровка	Тестирование программы
Измерения	Расчеты
Анализ данных	Анализ данных

Компьютерное моделирование незаменимо в тех случаях, когда натуральный эксперимент проводить невозможно или затруднительно по тем или иным причинам. Например, невозможно поставить натуральный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...». Однако это вполне можно сделать на компьютере. Невозможно поставить натуральный эксперимент, чтобы проверить правильность той или иной космологической теории, но вполне можно провести компьютерное моделирование. В принципе

возможно, но вряд ли гуманно, поставить натурный эксперимент по распространению какой-либо эпидемии, например, чумы. Подобное моделирование на компьютере не подвергнет опасности здоровье кого бы то ни было. Подобных примеров можно привести множество из самых разнообразных научных областей.

ЧАСТЬ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
МОДЕЛИ

Качественная теория динамических систем

Многие модели в физике, химии, биологии, социологии и других науках описываются дифференциальными уравнениями. Большинство из них не имеет аналитического решения, однако, многие важные черты поведения систем могут быть исследованы на качественном уровне, без помощи компьютеров. Давайте рассмотрим несколько примеров и на их основе познакомимся с приемами составления дифференциальных уравнений и их анализа.

§ 1. Маятник

Рассмотрим колебания тела относительно точки подвеса O , не совпадающей с центром масс тела (рис. 1.1). Будем полагать, что

- сила трения в оси пренебрежимо мала;
- сопротивление движению (вязкое трение) отсутствует;
- тело при движении не деформируется.

Момент инерции тела относительно оси вращения обозначим J , расстояние от оси вращения до центра масс — l , массу тела — m . Положение тела будем характеризовать его углом отклонения от положения равновесия φ . Движение тела описывается уравнением динамики вращательного движения

$$J\epsilon = M,$$

где M — момент всех сил, действующих на тело, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение тела¹⁾. Единственная сила, создающая вращательный момент, — сила тяжести. Ее момент равен

$$M = -mgl \sin \varphi.$$

Тогда уравнение движения маятника имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (1.1)$$

Вводя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J},$$

перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) является частным случаем уравнения более общего вида

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (1.3)$$

которое называют уравнением ангармонического осциллятора. Уравнение (1.2) не может быть проинтегрировано в элементарных функциях, однако, важнейшие черты поведения системы могут быть определены качественно.

1.1. Движение маятника вблизи положения устойчивого равновесия

Ограничимся для начала случаем малых отклонений маятника из положения равновесия ($\varphi \approx 0$). Тогда можно разложить $\sin \varphi$

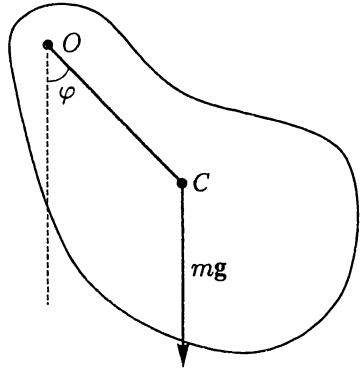


Рис. 1.1. Физический маятник

¹⁾ Здесь и далее мы будем часто использовать для обозначения производной по времени точку над соответствующей величиной. Вторая производная по времени — две точки.

в ряд Тейлора и ограничиться только первым членом разложения $\sin \varphi \approx \varphi$. Уравнение (1.2) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется *уравнением малых колебаний*. Введем обозначение $\dot{\varphi} = z$, тогда уравнение второго порядка (1.4) превращается в систему 2-х уравнений первого порядка

$$\frac{d\varphi}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -\omega_0^2 \varphi. \quad (1.5)$$

Интегрируя полученную систему, можно найти уравнения интегральных кривых. Для этого разделим второе уравнение на первое, чтобы исключить время

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{\omega_0^2 \varphi}{z}. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) — уравнение с разделяющимися переменными. Его решение

$$\frac{z^2}{\omega_0^2} + \varphi^2 = C^2 \quad (1.7)$$

представляет собой уравнение эллипсов. Постоянная C определяется начальными условиями. В частном случае, когда $C = 0$, эллипс вырождается в точку $(0, 0)$. Таким образом, семейство интегральных кривых — эллипсы, описанные около начала координат (рис. 1.2).

Определим, как эволюционирует система с течением времени. Из уравнения (1.5) следует, что если $z > 0$, то и $\dot{\varphi} > 0$, т. е. в верхней полуплоскости φ возрастает. Аналогично, в нижней полуплоскости φ уменьшается. Последовательность изменения состояний системы показана на рис. 1.2 стрелками.

*Интегральные кривые, на которых указано направление движения, называются **фазовыми траекториями**, а сама координатная плоскость — **фазовой плоскостью**.*

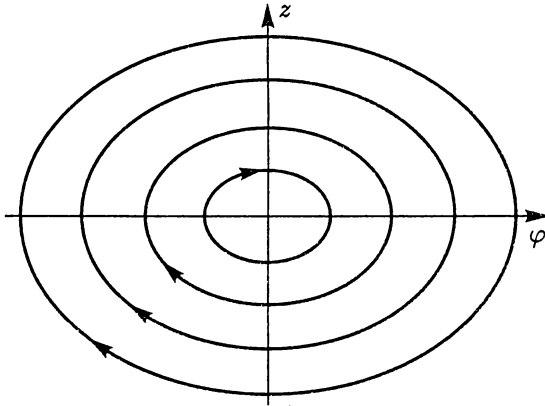


Рис. 1.2. Фазовые траектории в случае малых колебаний вблизи положения устойчивого равновесия

Замкнутые фазовые траектории соответствуют *финитному (ограниченному) движению*. Точка $(0, 0)$ является особой, она называется *центром*. В данной точке тело покоится, так как она соответствует положению устойчивого равновесия, поэтому ее называют также *точкой покоя* или *стационарной точкой*.

1.2. Приведение уравнений к безразмерному виду

Уравнение (1.7), определяющее форму фазовой траектории, содержит один параметр — ω_0 . Этот параметр влияет только на форму эллипса, или иными словами, на соотношение масштаба рисунка по различным осям. Таким образом, независимо от величины параметра движение будет оставаться периодическим. Поскольку нас интересует только качественное поведение системы, можно попытаться избавиться от этого параметра. Такой подход широко применяется при исследовании моделей. В дальнейшем мы будем применять его неоднократно.

Давайте будем измерять время не в секундах (минутах, часах), а в единицах периода колебаний гармонического осциллятора. Обозначим это безразмерное время τ

$$\tau = 2\pi \frac{t}{T} = \omega_0 t.$$

Множитель 2π введен для удобства. Если учесть, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \omega_0,$$

то с использованием безразмерного времени уравнение колебаний (1.2) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \sin \varphi = 0.$$

Полученное уравнение является универсальным, так как не содержит параметров. Его можно использовать для описания физического маятника с любыми параметрами, помня, однако, о том, что время следует измерять в особых безразмерных единицах. Легко заметить, что и все уравнение стало теперь безразмерным. Мы привели уравнение к безразмерному виду. Уравнения, записанные в безразмерном виде, проще поддаются анализу, так как содержат меньшее число параметров. При этом безразмерное уравнение сохраняет все свойства и особенности исходного уравнения.

1.3. Движение маятника вблизи положения неустойчивого равновесия

Рассмотрим теперь другой предельный случай: $\varphi \approx \pi$, т. е. система начинает движение из положения вблизи точки неустойчивого равновесия (рис. 1.3). Удобно ввести в рассмотрение угол α , характеризующий отклонение тела от положения неустойчивого равновесия $\alpha = \pi - \varphi$. Тогда $\sin \varphi = \sin \alpha$ и уравнение (1.2) принимает вид

$$-\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (1.8)$$

Вводя обозначение $\dot{\alpha} = z$, приходим к системе уравнений

$$\frac{d\alpha}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = \omega_0^2 \alpha. \quad (1.9)$$

Разделив второе уравнение системы на первое, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\omega_0^2 \alpha}{z}, \quad (1.10)$$

из которого находим уравнение интегральных кривых

$$\frac{z^2}{\omega_0^2} - \alpha^2 = C^2. \quad (1.11)$$

В данном случае интегральные кривые — гиперболы (рис. 1.4). Случай $C = 0$ — особый. Ему соответствуют прямые $z = \omega_0 \alpha$ и $z = -\omega_0 \alpha$. Из первого уравнения системы (1.9) следует, что в верхней полуплоскости α возрастает, а в нижней убывает. В точку $(0,0)$ входят две фазовые траектории по направлению $z = -\omega \alpha$ и выходят две траектории по направлению $z = \omega \alpha$. По аналогии с горным перевалом такую точку называют *седлом*. Седло также является точкой покоя, но точкой неустойчивого равновесия. Любое, сколь угодно малое воздействие выводит систему из этого состояния.

Теперь можно объединить рис. 1.2 и рис. 1.4, получив тем самым более полное представление о системе. Учтем, однако, что $\sin x$ — периодическая функция, следовательно, фрагменты рис. 1.2 и рис. 1.4 будут повторяться бесконечное число раз (рис. 1.5). Понятно, что при средних значениях φ фазовые траектории будут иметь вид деформированных эллипсов, причем искажения будут тем больше, чем больше угол.

Набор фазовых траекторий, соответствующих различным начальным состояниям системы, образует фазовый портрет.

На фазовом портрете можно выделить область замкнутых траекторий — область периодического движения (I) и область

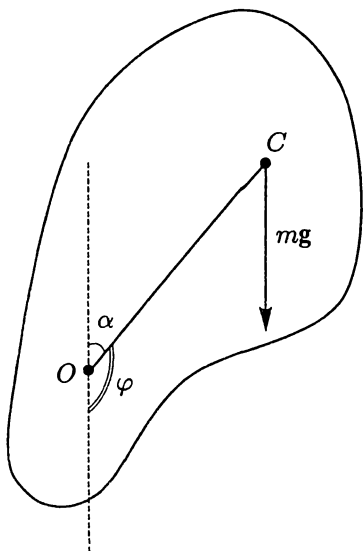


Рис. 1.3. Положение маятника вблизи состояния неустойчивого равновесия (имеется в виду точка, заданная формулами п. 4 на с. 44)

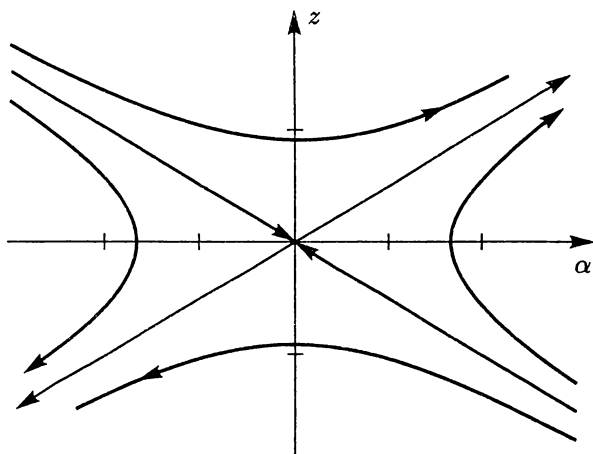


Рис. 1.4. Вид фазовых траекторий при движении маятника из состояния неустойчивого равновесия

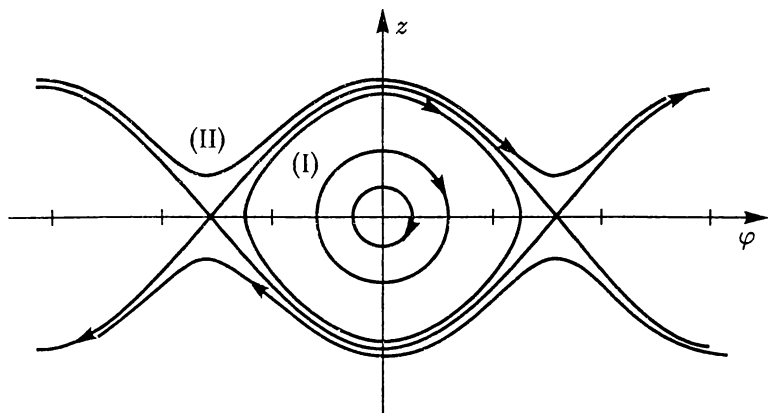


Рис. 1.5. Фазовый портрет физического маятника

незамкнутых траекторий (II), соответствующих вращению тела вокруг своей оси. Области (I) и (II) разделяет *сепаратриса*. Движение по сепаратрисе соответствует падению тела из положения неустойчивого равновесия ($\varphi \approx \pi$) с нулевой начальной скоростью.

1.4. Точное решение задачи о маятнике

После качественного анализа уравнения (1.2) найдем его точное решение. Полная механическая энергия W системы складывается из кинетической энергии $W_k = J\omega^2/2$ ($\omega = \dot{\varphi}$ — мгновенное значение угловой скорости) и потенциальной $W_p = mgl(1 - \cos \varphi)$. Если обозначить максимальное отклонение тела от положения равновесия через φ_{\max} , то полная энергия равна $mgl(1 - \cos \varphi_{\max})$. Запишем закон сохранения механической энергии

$$W = W_k + W_p = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) \quad (1.12)$$

или

$$mgl(1 - \cos \varphi_{\max}) = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (1.13)$$

Заметим, что при дифференцировании уравнения (1.12) получается уравнение (1.2). Естественно, уравнение движения системы не может зависеть от того, как оно получено, из уравнений динамики или из закона сохранения энергии.

Выражая из (1.13) $\dot{\varphi}$, имеем

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{2mgl}{J}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})}.$$

Выбор знака перед корнем определяется тем, что рост угла φ приводит к уменьшению скорости $\dot{\varphi}$, т. е. $\dot{\varphi} < 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$t = \sqrt{\frac{J}{2mgl}} \int_{\varphi}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_{\max}}}. \quad (1.14)$$

Для проведения преобразований уравнения (1.14) введем следующие обозначения

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}, \quad k = \frac{\sin \varphi_{\max}}{2}$$

и перейдем к тригонометрическим функциям половинного аргумента

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi_{\max} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_{\max}}{2}.$$

Тогда

$$t = \frac{T_0}{4\pi} \int_{\varphi}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (1.15)$$

Сделаем замену переменных

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \vartheta, \quad (1.16)$$

тогда

$$d\varphi = \frac{2k \cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad (1.17)$$

$$\varphi_{\max} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \rightarrow \vartheta' = \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_{\max}}{2}} \right) \quad (1.18)$$

и интеграл преобразуется к виду

$$\begin{aligned} t &= \frac{T_0}{4\pi} \int_{\vartheta'}^{\pi/2} \frac{2k \cos \vartheta d\vartheta}{k \cos \vartheta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \\ &= \frac{T_0}{2\pi} \int_{\vartheta'}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = F \left(k, \frac{\pi}{2} \right) - F(k, \vartheta'). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Функция

$$F(k, \vartheta) = \int_{\pi/2}^{\vartheta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} - \text{эллиптический интеграл I рода.}$$

Таким образом

$$t = F \left(k, \frac{\pi}{2} \right) - F(k, \theta),$$

где

$$\theta = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_{\max}}{2}},$$

и мы получили неявную зависимость координаты тела от времени. Функции, обратные к эллиптическим интегралам, называются *эллиптическими функциями* или *функциями Якоби*. Через них может быть выражена зависимость $\varphi(t)$. И эллиптические интегралы, и эллиптические функции являются *специальными функциями*. Они не могут быть выражены через элементарные функции, однако их свойства хорошо изучены, существуют справочники и таблицы, в которых можно найти формулы для вычисления специальных функций с заданной точностью (см., например, [2]).

§ 2. Маятник с затуханием

Рассмотрим более реалистичный пример — колебания тела с учетом сопротивления среды. Сила вязкого трения направлена против движения и пропорциональна скорости тела

$$F_c = -kv,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0,$$

где β — коэффициент затухания, зависящий как от k , так и от формы и размеров тела. Вновь ограничимся для начала только случаем малых отклонений φ тела от положения равновесия.

Приведем уравнение к безразмерному виду, используя замену $\tau = \omega_0 t$ и вводя обозначение $\gamma = \beta/\omega_0$,

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \sin \varphi = 0. \quad (1.20)$$

Если движение происходит вблизи положения устойчивого равновесия, то уравнения (1.20) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \varphi = 0.$$

Если же движение тела происходит вблизи положения неустойчивого равновесия, то

$$\ddot{\alpha} + 2\gamma\dot{\alpha} - \alpha = 0,$$

где $\alpha = \pi - \varphi$. Соответствующие системы уравнений

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = -2\gamma y - \varphi$$

и

$$\dot{\alpha} = y, \quad \dot{y} = -2\gamma y + \alpha.$$

Уравнения для нахождения интегральных кривых

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{2\gamma y + \varphi}{y}, \quad (1.21)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{-2\gamma y + \alpha}{y}. \quad (1.22)$$

Для интегрирования уравнений (1.21) и (1.22) сделаем замену переменных $y = \varphi z$ ($y = \alpha z$). Ограничимся подробными преобразованиями только для первого случая, для второго случая все выкладки совершенно аналогичные.

$$dy = z d\varphi + \varphi dz. \quad (1.23)$$

Подставим y и dy в (1.21)

$$\frac{dy}{d\varphi} = z + \varphi \frac{dz}{d\varphi} = -\frac{2\gamma\varphi z + \varphi}{\varphi z} = -\frac{2\gamma z + 1}{z},$$

$$\varphi \frac{dz}{d\varphi} = -\frac{z^2 + 2\gamma z + 1}{z},$$

$$\frac{z dz}{z^2 + 2\gamma z + 1} = -\frac{d\varphi}{\varphi},$$

$$\int \frac{z dz}{z^2 + 2\gamma z + 1} = -\int \frac{d\varphi}{\varphi} + C.$$

Преобразуем левую часть равенства к виду

$$\int \frac{z dz}{(z + \gamma)^2 + 1 - \gamma^2}$$

и проведем замену переменных $t = z + \gamma$, $dz = dt$, $1 - \gamma^2 = k^2$. Тогда интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{(t - \gamma) dt}{t^2 + k^2} = \int \frac{t dt}{t^2 + k^2} - \gamma \int \frac{dt}{t^2 + k^2}.$$

Полученные интегралы являются табличными.

$$\begin{aligned} \int \frac{t dt}{t^2 + k^2} &= \ln \sqrt{t^2 + k^2}, \\ \int \frac{dt}{t^2 + k^2} &= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$\ln \sqrt{\left(\frac{y}{\varphi} + \gamma\right)^2 + 1 - \gamma^2} - \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \operatorname{arctg} \frac{y + \gamma\varphi}{\varphi\sqrt{1 - \gamma^2}} = -\ln C\varphi.$$

Объединяя логарифмы и потенцируя, получаем

$$\sqrt{(y + \gamma\varphi)^2 + \varphi^2(1 - \gamma^2)} = C' \exp \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \operatorname{arctg} \frac{y + \gamma\varphi}{\varphi\sqrt{1 - \gamma^2}} \right\}.$$

Введем обозначения $\varphi\sqrt{1 - \gamma^2} = u$, $y + \gamma\varphi = v$, тогда

$$\sqrt{u^2 + v^2} = C' \exp \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \right\}.$$

Перейдем к полярным координатам

$$\rho^2 = u^2 + v^2, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}.$$

Тогда

$$\rho = C' \exp \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \vartheta \right\}. \tag{1.25}$$

Полученное нами уравнение — это уравнение логарифмической спирали. В частном случае, если силы сопротивления отсутствуют ($\gamma = 0$), уравнение (1.25) превращается в уравнение семейства окружностей ($\rho = C'$). Особая точка $(0, 0)$ называется *фокусом*. К ней стремятся все фазовые траектории при $t \rightarrow \infty$.

В отличие от центра, фокус является грубой особой точкой. Это значит, что ее характер не меняется при изменении параметров системы (в данном случае параметра γ) в широком диапазоне. Особая точка центр соответствует единственному значению параметра ($\gamma = 0$.)

Изолированная особая точка называется *аттрактором*, если все фазовые траектории стремятся к ней при $t \rightarrow \infty$.

Если $\gamma^2 > 1$, то обозначив $1 - \gamma^2 = -k^2$, приходим к интегралу

$$\int \frac{(t - \gamma) dt}{t^2 - k^2}. \quad (1.26)$$

Этот интеграл можно вычислить, используя метод неопределенных коэффициентов

$$\frac{t - \gamma}{t^2 - k^2} = \frac{A}{t - k} + \frac{B}{t + k} = \frac{t(A + B) + k(A - B)}{t^2 - k^2}.$$

Отсюда $A + B = 1$, $A - B = -\gamma/k$ или

$$A = \frac{k - \gamma}{2k}, \quad B = \frac{k + \gamma}{2k}.$$

$$\begin{aligned} \frac{k - \gamma}{2k} \int \frac{dt}{t - k} + \frac{k + \gamma}{2k} \int \frac{dt}{t + k} &= \\ &= \frac{k - \gamma}{2k} \ln |t - k| + \frac{k + \gamma}{2k} \ln |t + k| = -\ln C' \varphi. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным y и φ , имеем

$$(y + \varphi(\gamma - k))^{k-\gamma} (y + \varphi(\gamma + k))^{k+\gamma} = C^*.$$

Вводя обозначения

$$\delta = \frac{k + \gamma}{\gamma - k} = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} > 1,$$

$$u = y + \varphi(\gamma - k), \quad v = y + \varphi(\gamma + k),$$

имеем

$$u = \tilde{C}v^\delta \quad (1.27)$$

— уравнение параболы. Особая точка такого вида называется *узлом*. В частном случае, если $k = 0$ ($\beta = \omega_0$), то $\delta = 1$. В этом случае мы получаем пучок прямых, и особая точка называется *вырожденный узел*.

Вернемся теперь к случаю движения маятника вблизи положения неустойчивого равновесия

$$\frac{z dz}{z^2 + 2\gamma z - 1} = -\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Введем обозначение $\gamma^2 + 1 = a^2 > 0$, тогда мы приходим к интегралу вида (1.26), решение которого мы только что получили.

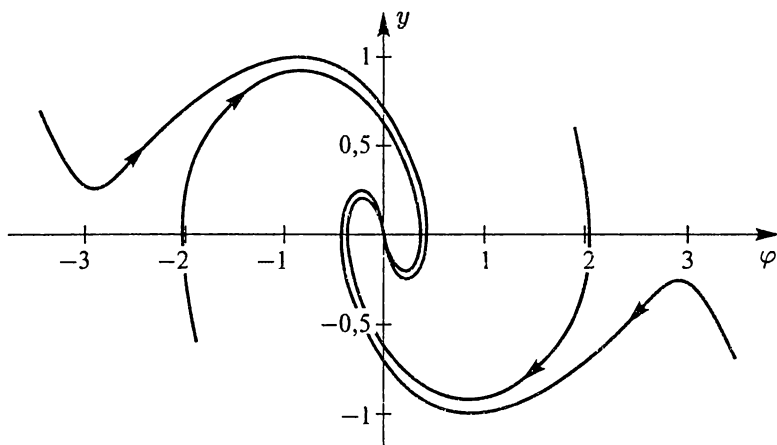


Рис. 1.6. Фазовый портрет маятника с затуханием

Отличие заключается лишь в том, что в данном случае

$$\delta = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 1}} < 0,$$

т. е. уравнение (1.27) — уравнение гипербол. Положению неустойчивого равновесия вновь соответствует особая точка седло. Характер этой особой точки не зависит от величины затухания, т. е. она является грубой (рис. 1.6).

Проведенный нами анализ достаточно простой физической системы оказался достаточно громоздким. Однако для анализа иных систем нам не придется вновь проделывать подобные математические выкладки. В следующем параграфе мы классифицируем все возможные типы особых точек и найдем признаки, позволяющие сразу же определить характер особых точек той или иной системы.

§ 3. Качественное исследование динамических систем

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений I порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Ограничимся рассмотрением только *стационарных (автономных)* систем, т. е. систем, в которых P и Q не зависят явно от времени. В простейшем случае P и Q — линейные функции:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Особыми точками системы (1.28) называются точки, в которых и P и Q обращаются одновременно в ноль.

Очевидно, что система (1.29) имеет единственную особую точку — $(0, 0)$. Будем искать решение системы (1.29) в виде

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}.$$

Подставив решения в систему (1.29) и сократив на общий множитель $e^{\lambda t}$, имеем

$$\begin{aligned} (a - \lambda)A + bB &= 0, \\ cA + (d - \lambda)B &= 0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Система (1.30) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \tag{1.31}$$

Уравнение (1.31) называется *характеристическим*. Его решения —

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2}{4} + bc - ad} = \frac{\text{tr } M}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr } M}{2}\right)^2 - \det M}.$$

Здесь M — матрица коэффициентов системы (1.29). Если корни характеристического уравнения различны и не равны нулю ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$), то решения имеют вид

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1 \chi_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \chi_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Заменой переменных можно свести систему (1.29) к системе

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= S_1 \tilde{x}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= S_2 \tilde{y} \end{aligned} \tag{1.33}$$

или дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{S_2 \tilde{y}}{S_1 \tilde{x}}, \tag{1.34}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \alpha x + \beta y, \\ \tilde{y} &= \gamma x + \delta y.\end{aligned}\tag{1.35}$$

Постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ находятся следующим образом: продифференцируем систему уравнений (1.35)

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= \alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \gamma \frac{dx}{dt} + \delta \frac{dy}{dt}\end{aligned}\tag{1.36}$$

и подставим вместо dx/dt и dy/dt их выражения из системы (1.29)

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= \alpha(ax + by) + \beta(cx + dy), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy).\end{aligned}\tag{1.37}$$

Учтя систему (1.33), имеем

$$\begin{aligned}\alpha(ax + by) + \beta(cx + dy) &= S_1(\alpha x + \beta y), \\ \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy) &= S_2(\gamma x + \delta y).\end{aligned}\tag{1.38}$$

Равенство должно выполняться при всех x и y , следовательно, коэффициенты при переменных в левой и правой частях уравнения должны совпадать.

$$\begin{cases} (a - S_1)\alpha + c\beta = 0, & (a - S_2)\gamma + c\delta = 0, \\ b\alpha + (d - S_1)\beta = 0, & b\gamma + (d - S_2)\delta = 0. \end{cases}\tag{1.39}$$

Мы получили системы линейных однородных уравнений относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е. коэффициенты S_i должны удовлетворять уравнению

$$(a - S_i)(d - S_i) - bc = 0, \quad i = 1, 2,\tag{1.40}$$

которое совпадает с уравнением (1.31). Таким образом, S_i являются корнями характеристического уравнения (1.31), т. е. $S_1 = \lambda_1$, $S_2 = \lambda_2$. При этом $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$. Первая из систем (1.39) дает отношение

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{\lambda_1 - a} = \frac{\lambda_1 - d}{b}, \quad (1.41)$$

вторая —

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{c}{\lambda_2 - a} = \frac{\lambda_2 - d}{b}. \quad (1.42)$$

Решение уравнения (1.34) имеет вид

$$\tilde{y} = \tilde{C} |\tilde{x}|^{\lambda_2/\lambda_1}. \quad (1.43)$$

В случае действительных корней уравнение (1.43) определяет в зависимости от знака показателя степени или семейство парабол, или семейство гипербол.

Аффинные преобразования (1.35) не меняют характера особой точки. Замена переменных приводит только к масштабированию и повороту координатных осей. Определим новое положение осей после аффинного преобразования в случае действительных корней характеристического уравнения. Если $\tilde{x} = 0$, то из первого уравнения системы (1.35) следует, что $y = -\alpha x/\beta$. При $\tilde{y} = 0$ из второго уравнения системы находим, что $y = -\gamma x/\delta$. Угловые коэффициенты выражаются через параметры исходной системы в соответствии с формулами (1.41) и (1.42).

В случае комплексных корней новые переменные \tilde{x} и \tilde{y} будут комплексными. Пусть

$$\lambda_1 = R + iI, \quad \lambda_2 = R - iI, \quad \tilde{x} = u + iv, \quad \tilde{y} = u - iv,$$

где R, I, u, v — действительные величины. Тогда система уравнений (1.33) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} &= (R + iI)(u + iv), \\ \frac{du}{dt} - i \frac{dv}{dt} &= (R - iI)(u - iv). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Откуда

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= uR - vI, \\ \frac{dv}{dt} &= vR + uI.\end{aligned}\tag{1.45}$$

Тогда уравнение интегральных кривых имеет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{vR + uI}{uR - vI}.\tag{1.46}$$

После перехода к полярным координатам $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$ получаем уравнение логарифмической спирали

$$r = C \exp \left\{ \frac{R}{I} \varphi \right\}.\tag{1.47}$$

В случае чисто мнимых корней уравнение (1.47) переходит в уравнение семейства окружностей $r = C$.

Если корни характеристического уравнения кратные $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то заменой переменных

$$\tilde{x} = ax + \frac{b-c}{2}y, \quad \tilde{y} = y\tag{1.48}$$

система может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} + \lambda\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} = \lambda\tilde{x} \end{cases}\tag{1.49}$$

или уравнению

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\tilde{x} + \lambda\tilde{y}}{\lambda\tilde{x}}.\tag{1.50}$$

Решение уравнения (1.50) имеет вид

$$\tilde{y} = \frac{1}{\lambda} \tilde{x} \ln |\tilde{x}| + \tilde{C}\tilde{x}.\tag{1.51}$$

Уравнения (1.34) и (1.50) называются уравнениями, записанными в *каноническом виде*.

Если хотя бы один из корней характеристического уравнения равен нулю, то уравнения (1.29) линейно зависимы, их можно сократить, и уравнение (1.29) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = k,$$

и решения на плоскости (x, y) изображаются параллельными прямыми.

§ 4. Сводка результатов

Тип особой точки автономной линейной системы (1.29) определяется характеристическим уравнением (1.31).

1. Корни вещественные, различные и одного знака ($0 < \det \mathbf{M} < (\text{tr } \mathbf{M}/2)^2$): уравнение (1.43) определяет семейство парабол. Если корни характеристического уравнения положительны, то решения будут неограниченно возрастать и фазовые траектории будут уходить на бесконечность. В случае отрицательных корней решения с ростом времени будут неограниченно уменьшаться, фазовые траектории стремятся к нулю.
 - a) Корни положительные ($\text{tr } \mathbf{M} < 0$): особая точка — устойчивый узел.
 - b) Корни отрицательные ($\text{tr } \mathbf{M} > 0$): особая точка — неустойчивый узел.
2. Корни вещественные, одинаковые и отличны от нуля: особая точка — или вырожденный узел или *дикритический* (*звездный*) узел. Дикритический узел возможен только в случае

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{ax}.$$

3. Корни вещественные, различные и разных знаков ($\det \mathbf{M} < 0$): уравнение (1.43) определяет семейство гипербол, особая точка — седло.

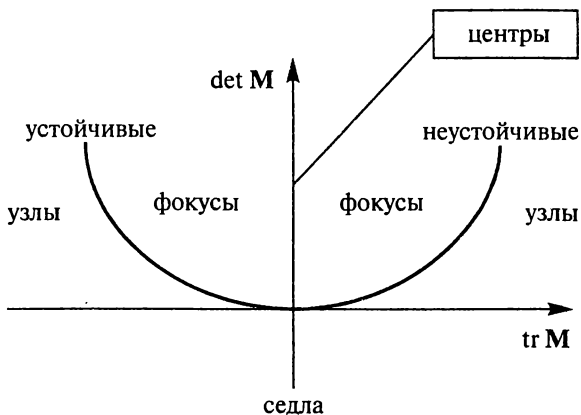


Рис. 1.7. Вид особой точки при различных значениях определителя и следа матрицы системы уравнений

4. Корни комплексно сопряженные (но не чисто мнимые) ($\det \mathbf{M} > (\text{tr } \mathbf{M}/2)^2$).
 - а) действительная часть отрицательная ($\text{tr } \mathbf{M} < 0$): особая точка — устойчивый фокус;
 - б) действительная часть положительная ($\text{tr } \mathbf{M} > 0$): особая точка — неустойчивый фокус.
5. Корни чисто мнимые ($\text{tr } \mathbf{M} = 0, \det \mathbf{M} > 0$): особая точка — центр.
6. Один из корней равен нулю: особые точки полностью заполняют одну из координатных осей.

Эти правила удобно представить в виде рисунка (1.7)

Для анализа нелинейной системы проводят ее линеаризацию.

Для этого

1. Определяют особые точки системы.
2. Вблизи особых точек заменой переменных приводят исходную систему к виду

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + p(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + q(x, y).$$

Причем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{p(x, y)}{ax + by} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{q(x, y)}{cx + dy} = 0,$$

если (x_0, y_0) — особая точка.

3. Ограничиваются учетом только линейных слагаемых.
4. Определяют тип особых точек линеаризованной системы. Характеристики особых точек линеаризованной и исходной систем совпадают, кроме следующих случаев:
 - а) если особая точка линеаризованной системы — центр, то особая точка исходной системы либо центр, либо фокус;
 - б) если хотя бы один из корней линеаризованной системы равен нулю, то для анализа особой точки исходной системы требуется дополнительное исследование.

Динамика биологических популяций

Популяционная динамика — один из разделов математического моделирования, имеющий приложения в биологии, экологии, демографии, экономике. Здесь имеется несколько базовых моделей, изучением которых мы и займемся.

§ 1. Модель Мальтуса

Рассмотрим некоторый биологический вид, у которого нет врагов, а кормовая база имеется в избытке. Обозначим численность вида x . Тогда скорость прироста (изменение числа особей в единицу времени) dx/dt будет пропорциональна числу уже имеющихся особей.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad (2.1)$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент прироста. Понятно, что эта модель является весьма упрощенной. Во-первых, число особей — дискретная, а не непрерывная величина, т. е. модель применима только тогда, когда изменение численности популяции на одну особь можно рассматривать как бесконечно малое. Во-вторых, рост популяции всегда ограничен различными факторами: врагами, кормовой базой, эпидемиями и т. д. Однако, в некоторых случаях, например, при рассмотрении размножения бактерий, эта модель оказывается вполне приемлемой. Впервые она была предложена в XVIII в. Мальтусом, и часто называется по имени создателя *моделью Мальтуса*.

Уравнение (2.1) — уравнение с разделяющимися переменными. Его интегрирование дает

$$x = x_0 e^{\alpha t}, \quad (2.2)$$

где x_0 — численность популяции в начальный момент времени.

§ 2. Логистическое уравнение

Давайте уточним модель, сделаем ее более реалистичной, ограничив экспоненциальный рост численности особей. Очевидно, что если популяция живет на ограниченной территории, то неизбежно возникает конкуренция за жизненное пространство. Встречи особей друг с другом приводят так же к распространению болезней. Понятно, что убыль популяции, связанная с этими факторами, пропорциональна частоте встреч особей друг с другом, т. е. x^2 . Тогда уравнение динамики популяции имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta x), \quad (2.3)$$

где $\beta > 0$ — коэффициент, описывающий убыль популяции. Уравнение (2.3) называется *уравнением Ферхюльста* или *логистическим уравнением*. Уравнение (2.3) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получаем

$$\int \frac{dx}{x(\alpha - \beta x)} = \int dt + C, \quad (2.4)$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, вычисляем интеграл в левой части уравнения

$$\ln \left(\frac{x}{\alpha - \beta x} \right)^{1/\alpha} = t + C. \quad (2.5)$$

Потенцируя, находим

$$\frac{x}{\alpha - \beta x} = A e^{\alpha t}. \quad (2.6)$$

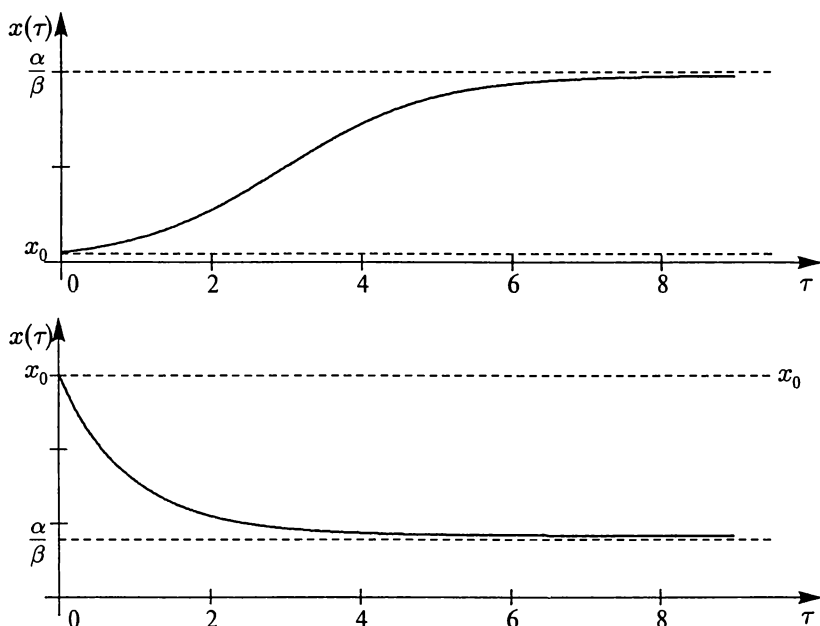


Рис. 2.1. Поведение логистической кривой в зависимости от соотношения параметров

Коэффициент A найдем из условия, что в начальный момент времени ($t = 0$) число особей равнялось x_0 :

$$A = \frac{x_0}{\alpha - \beta x_0}. \quad (2.7)$$

Тогда

$$x = \frac{x_0 \alpha e^{\alpha t}}{\alpha - \beta x_0 + \beta x_0 e^{\alpha t}}. \quad (2.8)$$

При $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \alpha/\beta$.

Функция (2.8) носит название *логистической*. Многие процессы, не только в биологии, но и в экономике, социологии, описываются логистическими уравнениями. Удобно ввести безразмерное время $\tau = \alpha t$ и параметр $r = \alpha/\beta$. Тогда характер изменения

численности популяции определяется только отношением x_0/r . На рис. 2.1 представлена зависимость $x(\tau)$.

Рассмотренные нами модели изолированной, не взаимодействующей с другими видами популяции, описывают достаточно экзотическую, исключительную ситуацию. Как правило, в природе виды сталкиваются друг с другом в борьбе за кормовые ресурсы, жизненное пространство, охотясь друг на друга.

§ 3. Модель Вольтерра

Для того и щука в реке, чтоб карась не дремал.

Поговорка

В 1931 г. Вито Вольтерра предложил модель хищник-жертва. Пусть на некоторой замкнутой территории обитают два вида: вегетарианцы-жертвы, питающиеся подножным кормом, имеющимся в избытке, и хищники, охотящиеся на жертв. В качестве пары хищник-жертва могут выступать волки и овцы, щуки и караси, рыси и зайцы...

Если бы не было хищников, то жертвы размножились бы беспредельно и их численность описывалась бы уравнением Мальтуса (2.1). Если бы не было жертв, то хищники от бескормицы постепенно вымирали бы

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y, \quad y = y_0 e^{-\gamma t}, \quad (2.9)$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент убыли хищников, y — их численность в данный момент времени, y_0 — их численность в начальный момент времени. Росту численности жертв, однако, препятствуют их встречи с хищниками, частота которых пропорциональна как числу жертв, так и числу хищников — xy . Тогда скорость изменения численности жертв описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \quad (2.10)$$

где $\beta > 0$ — коэффициент убыли жертв при встрече с хищниками.

Аналогично, встреча хищника с жертвой увеличивает вероятность выживания хищника, т. е. способствует приросту популяции хищников

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x), \quad (2.11)$$

где $\delta > 0$ — коэффициент, зависящий от того, как часто встреча хищника с жертвой заканчивается трапезой.

Проанализируем полученную нелинейную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x). \end{cases} \quad (2.12)$$

Найдем стационарное, т. е. не зависящее от времени, состояние системы. Если численность популяций постоянна, то их производные по времени равны нулю

$$\begin{cases} 0 = x(\alpha - \beta y), \\ 0 = -y(\gamma - \delta x). \end{cases} \quad (2.13)$$

Откуда

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\gamma}{\delta}, \quad y_2 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.14)$$

Производные обращаются в ноль на прямых

$$x = \frac{\gamma}{\delta}, \quad y = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (2.15)$$

следовательно, численности популяций имеют здесь экстремумы.

Ситуации, когда в наличии имеется только одна популяция (или хищников, или жертв), анализировалась нами ранее при выводе системы (2.12). На фазовой плоскости им соответствуют луч $y = 0$, входящий в начало координат, и луч $x = 0$, исходящий из начала координат. Отсюда очевидно, что начало координат является особой точкой типа седло. Фазовые траектории вблизи этой особой точки ведут себя как гиперболы и направлены против часовой стрелки.

Более интересна стационарная точка (x_2, y_2) . Разложим правые части системы (2.12) вблизи стационарной точки, ограничившись случаем малых отклонений от положения равновесия η и ξ

$$\begin{cases} \eta = x - x_2 = x - \frac{\gamma}{\delta}, \\ \xi = y - y_2 = y - \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Тогда система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = -\beta\eta\xi - \frac{\gamma\beta}{\delta}\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} = \delta\eta\xi + \frac{\alpha\delta}{\beta}\eta. \end{cases} \quad (2.17)$$

Поскольку η и ξ малы, пренебрежем слагаемыми $\eta\xi$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\gamma\beta}{\delta}\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha\delta}{\beta}\eta. \end{cases} \quad (2.18)$$

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\gamma\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

имеет корни

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}. \quad (2.20)$$

Корни характеристического уравнения чисто мнимые, следовательно, особая точка — центр. Вблизи особой точки фазовые траектории представляют собой эллипсы (рис. 2.2).

Численности популяций испытывают не совпадающие по фазе колебания (рис. 2.3).

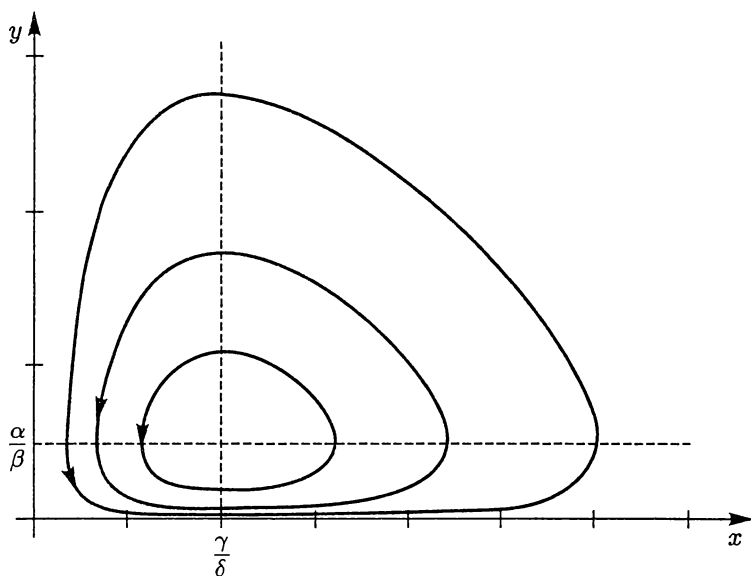


Рис. 2.2. Зависимость числа хищников от числа жертв при различных начальных условиях

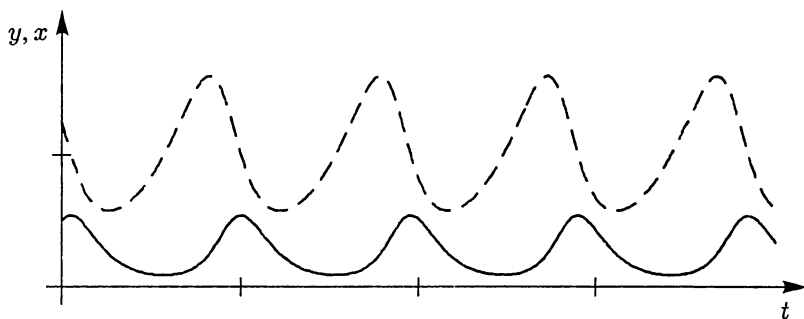


Рис. 2.3. Зависимость числа хищников (сплошная линия) и жертв (пунктир) от времени

Полученная зависимость согласуется с экспериментальными данными. Однако модель является неустойчивой: при скачкообразном изменении числа особей в одной из популяций (например, из-за миграции животных, деятельности человека или иных причин, не учтенных в модели) колебания навсегда изменят свой характер, система перейдет с одной фазовой траектории на другую. Кроме того, особая точка типа центр не является грубой, т. е. при введении в модель даже малых поправок, она может изменить свой характер.

§ 4. Модификации модели Вольтерра

Существуют многочисленные модификации модели Вольтерра. В частности, можно учесть самоограничение на рост популяции жертв

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y - \beta' x), \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x). \end{cases} \quad (2.21)$$

В зависимости от соотношения параметров особая точка системы (2.21) может быть либо фокусом, либо узлом, но и в том, и в другом случае система с течением времени стремится к устойчивому состоянию¹⁾.

Еще один вариант модификации модели — учет конкуренции двух видов хищников за один источник корма (лисы, волки и зайцы). Здесь имеется богатое разнообразие решений, в том числе, и исчезновение всех трех видов.

§ 5. Межвидовая конкуренция

Рассмотрим ситуацию, когда два вида потребляют один и тот же ресурс. Примером такой системы могут служить стадо коз

¹⁾ Исследуйте эту систему самостоятельно.

и стадо овец, пасущиеся на одном и том же лугу. Динамика численности видов определяется следующей системой

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1). \end{cases} \quad (2.22)$$

Здесь N_i — численность i -го вида, r_i — коэффициент прироста i -го вида, β_i — коэффициент, описывающий внутривидовое влияние, α_i — коэффициент, описывающий влияние со стороны другого вида. Все коэффициенты положительны. Из уравнений (2.22) следует, что система имеет следующие особые точки:

1. $N_1 = 0, \quad N_2 = 0,$
2. $N_1 = 0, \quad N_2 = \frac{r_2}{\beta_2},$
3. $N_1 = \frac{r_1}{\beta_1}, \quad N_2 = 0,$
4. $N_1 = \frac{r_2 \alpha_2 - \beta_2 r_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}, \quad N_2 = \frac{r_1 \alpha_1 - \beta_1 r_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}.$

Если бы вторая популяция отсутствовала (последнее слагаемое первого уравнения системы (2.22)), то численность первой популяции описывалась бы обыкновенным логистическим уравнением. Это значит, что при большой начальной численности размер популяции убывает, а при малой возрастает, пока не достигнет величины r_1/β_1 . На координатной плоскости такая вырожденная система соответствует оси N_1 ($N_2 = 0$). Фазовые траектории направлены к особой точке 3. Рассуждая аналогично, получаем, что в случае отсутствия первой популяции, фазовые траектории направлены по оси N_2 к точке 2. По смыслу задачи величины $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$. Поэтому особая точка (4) должна находиться в первой четверти координатной плоскости. Возможны две ситуации:

1. $\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 > 0, \quad r_2 \alpha_2 - \beta_2 r_1 > 0, \quad r_1 \alpha_1 - \beta_1 r_2 > 0,$
2. $\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 < 0, \quad r_2 \alpha_2 - \beta_2 r_1 < 0, \quad r_1 \alpha_1 - \beta_1 r_2 < 0.$

В противном случае особая точка лежит за пределами первой четверти и для нас не представляет интереса.

Анализ всех этих особых точек не представляет принципиальных трудностей, однако является достаточно громоздким²⁾. Поэтому мы проведем анализ поведения фазовых траекторий несколько необычным способом. Найдем особые направления, т. е. линии, на которых производные обращаются в ноль

$$\begin{cases} N_2 = \frac{r_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_2} N_1, \\ N_2 = \frac{r_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_2} N_1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Теперь определим знаки производных в различных частях первой четверти координатной плоскости.

$$\dot{N}_1 > 0 : N_2 < \frac{r_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_2} N_1, \quad (2.24)$$

$$\dot{N}_2 > 0 : N_2 < \frac{r_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_2} N_1. \quad (2.25)$$

Начнем со случая, когда в системе имеется только три особые точки. Возможно две ситуации:

1. $\frac{r_1}{\alpha_2} > \frac{r_2}{\beta_2}$ и $\frac{r_1}{\beta_1} > \frac{r_2}{\alpha_1}$,
2. $\frac{r_1}{\alpha_2} < \frac{r_2}{\beta_2}$ и $\frac{r_1}{\beta_1} < \frac{r_2}{\alpha_1}$.

На рис. 2.4 *a* показаны области убывания и возрастания численности популяций для первого случая. Можно сделать вывод, что особая точка 2 является седлом, так как по некоторым направлениям фазовые траектории направлены к этой точке, а по некоторым направлениям — от нее. Особая точка 3 является устойчивым узлом, так как по всем направлениям фазовые траектории входят в нее. Особая точка 1 — неустойчивый узел, так как все фазовые траектории выходят из этой точки. Понятно, что при определенном соотношении параметров узлы могут стать вырожденными.

²⁾ Проведите анализ особых точек самостоятельно.

Фазовый портрет, полученный путем решения системы (2.22), представлен на рис. 2.4 б. Характер поведения фазовых траекторий соответствует результатам нашего качественного анализа. Если в системе в начальный момент времени существовали обе популяции, то при любом соотношении их численностей с течением времени популяция 2 полностью вымрет, и останется только первая популяция со стационарной численностью r_1/β_1 . Эта же численность установится и в том случае, если в начальный момент времени в системе были представители только первого вида.

Если в начальный момент времени имелись представители только второго вида, то их численность будет меняться по логистическому закону (2.8), пока не достигнет величины r_2/β_2 . Однако, достигнутая численность не является устойчивой.

На рис. 2.5 а показаны области убывания и возрастания численности популяций для второго случая. Теперь особая точка 3 является седлом, а особая точка 2 — устойчивым узлом. Особая точка 1, как и прежде, — неустойчивый узел. Фазовый портрет, полученный путем решения системы (2.22), представлен на рис. 2.5 б. При данном соотношении параметров устойчивым является состояние, когда в системе имеются только представители второго вида.

Рассмотрим теперь случай, когда особая точка 4 лежит в первой четверти. Вновь возможны две ситуации при различных соотношениях параметров (см. с. 45). Для первого случая области убывания и возрастания показаны на рис. 2.6 а. Можно сделать вывод, что особые точки 2, 3 — устойчивые узлы, особая точка 1 — неустойчивый узел, особая точка 4 — седло. Фазовый портрет такой системы представлен на рис. 2.6 б.

В зависимости от соотношения начальных численностей в системе выживает один из видов. Ситуация, когда в системе сосуществуют оба вида с постоянными численностями, является теоретически возможной, но практически крайне маловероятной. Дело в том, что, во-первых, это состояние (седло) является неустойчивым, т. е. сколь угодно малое изменение численности одной из популяций по причинам, которые не учитываются в данной модели (эпидемия, охота, природные катаклизмы и т. д.), приведет с течением времени к переходу системы в одну из узловых точек. Во-вторых, в данное состояние система придет только в том слу-

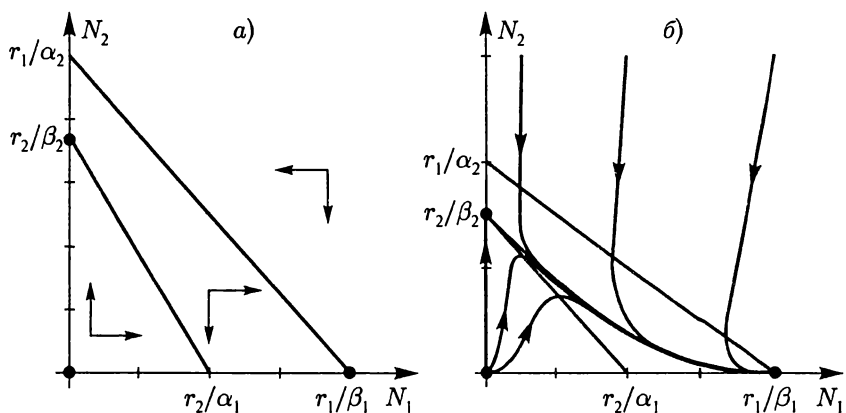


Рис. 2.4. Области убывания и возрастания численности популяций (а). Фазовый портрет (б). Вид 1 выживает, вид 2 вымирает

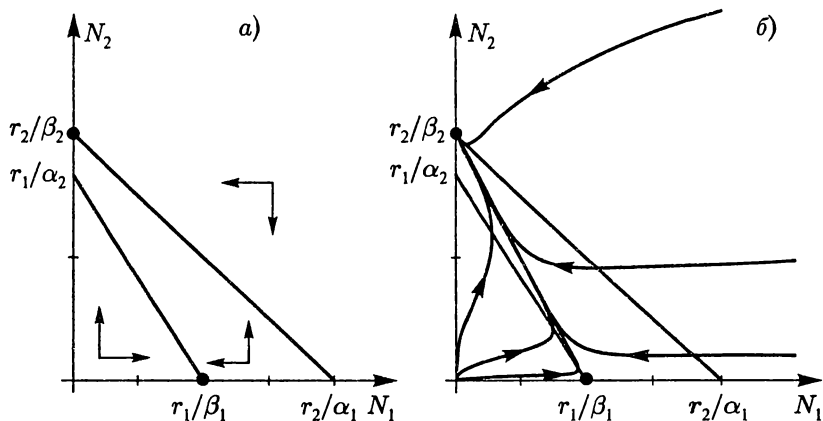


Рис. 2.5. Области убывания и возрастания численности популяций (а). Фазовый портрет (б). Вид 2 выживает, вид 1 вымирает

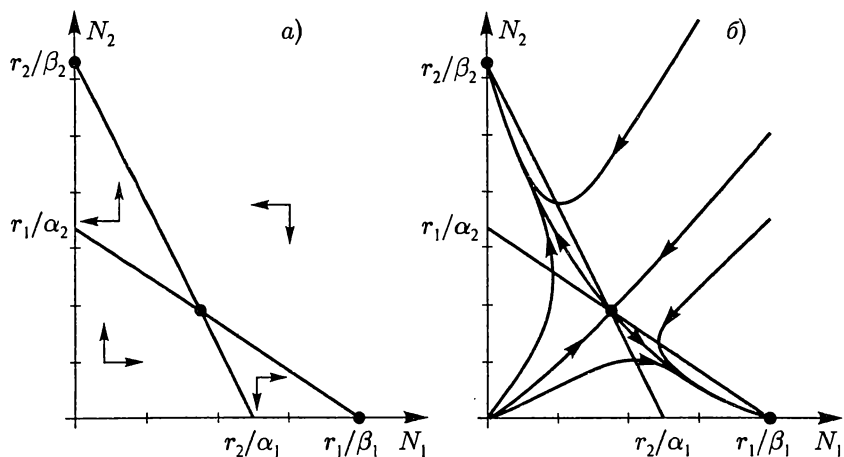


Рис. 2.6. Области убывания и возрастания численности популяций (а). Фазовый портрет (б). Особая точка 4 — седло. Один из видов выживает, другой вымирает

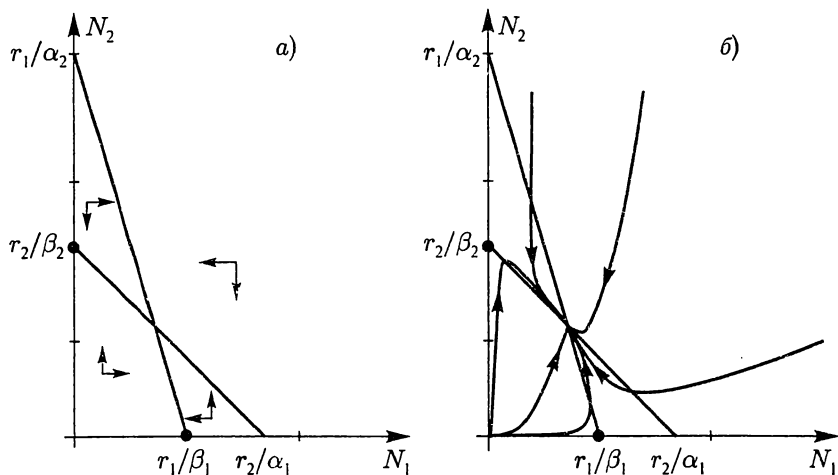


Рис. 2.7. Области убывания и возрастания численности популяций (а). Фазовый портрет (б). Особая точка 4 — узел. Оба вида сосуществуют

чае, когда ее начальному состоянию соответствовала точка фазовой плоскости, лежащая на одном единственном особом направлении, ведущем к седловой особой точке. Понятно, что вероятность таких начальных состояний фактически равна нулю.

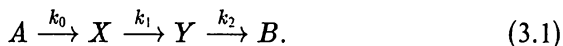
Последняя из возможных ситуаций представлена на рис. 2.7*а*. Особая точка 4 — устойчивый узел, особые точки 2, 3 — седла. При данном соотношении параметров в системе устанавливается устойчивое стационарное состояние, при котором оба вида сосуществуют (рис. 2.7*б*).

Рассмотренная нами простейшая модель межвидовой конкуренции проявляет большое разнообразие возможных решений.

Колебательные процессы в химии

§ 1. Затухающие колебания

В 1910 г. Альфред Д. Лотка рассмотрел следующую цепочку химических реакций



Молекулы вещества A имеются в избытке и превращаются в молекулы вещества X с постоянной скоростью k_0 . Вещество X превращается в вещество Y со скоростью тем большей, чем больше концентрации X и Y . Вещество Y необратимо распадается на B . Для анализа этой химической реакции воспользуемся следующим правилом

Скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции.

Обозначив через x , y , b концентрации веществ X , Y , B , получаем следующие кинетические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_0 - k_1xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k_1xy - k_2y, \\ \frac{db}{dt} &= k_2y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Первые два уравнения системы не зависят от b и их можно рассматривать отдельно. Найдем особые точки этой нелинейной динамической системы

$$\begin{cases} k_0 - k_1xy = 0, \\ k_1xy - k_2y = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим, что x имеет экстремумы на гиперболе $y = k_0/(k_1x)$. Из второго уравнения получаем, что либо $y = 0$, либо $x = k_2/k_1$. Первая ситуация не представляет интереса, так как противоречит условиям модели, поэтому подробно рассмотрим только вторую возможность. Особая точка имеет координаты

$$x = \frac{k_2}{k_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{k_0}{k_2}.$$

Введем новые переменные

$$\tilde{y} = y - \frac{k_0}{k_2} \quad \text{и} \quad \tilde{x} = x - \frac{k_2}{k_1}.$$

После подстановки новых переменных и линеаризации система принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= -k_2\tilde{y} - \frac{k_1k_0}{k_2}\tilde{x}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \frac{k_1k_0}{k_2}\tilde{x}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Характеристическое уравнение системы (3.3)

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1k_0}{k_2} + \lambda & k_2 \\ -\frac{k_1k_0}{k_2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k_1k_0}{k_2}\lambda + k_1k_0 = 0 \tag{3.4}$$

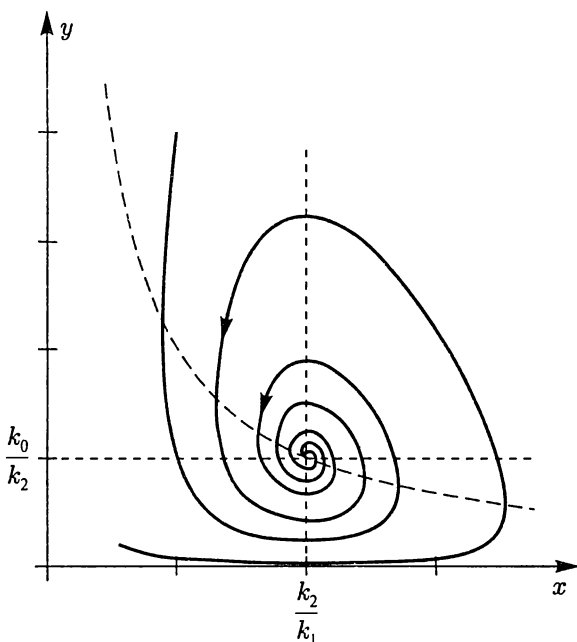


Рис. 3.1. Фазовый портрет системы Лотки

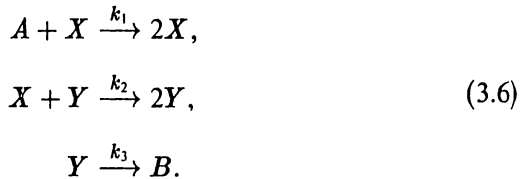
имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{k_0 k_1}{k_2} \pm \sqrt{\frac{k_0^2 k_1^2}{k_2^2} - 4k_1 k_2} \right). \quad (3.5)$$

Возможны следующие ситуации: если подкоренное выражение отрицательное, то корни будут комплексно сопряженными и, следовательно, особая точка — устойчивый фокус; если подкоренное выражение положительно, то мы имеем два действительных разных отрицательных корня, т. е. особая точка — устойчивый узел. Для уточнения характера поведения фазовых траекторий заметим, что особый случай $y = 0$ соответствует положительной производной x , т. е. положительное направление оси x соответствует направлению фазовых траекторий. Фазовый портрет системы представлен на рис. 3.1.

§ 2. Незатухающие колебания

В 1925 г. А. Д. Лотка рассмотрел еще одну цепочку химических реакций



Вещество A имеется в избытке, т. е. его уменьшением в результате реакции можно пренебречь. Все реакции необратимые.

Этой цепочке превращений соответствует следующая система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1 ax - k_2 xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 xy - k_3 y. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Особые точки системы (3.7) — $(0, 0)$ — седло и $(k_3/k_2, k_1 a/k_2)$ — центр. Концентрации реагирующих веществ испытывают периодические колебания во времени.

Легко заметить, что система (3.7) и система (2.12) отличаются только обозначениями. Это не удивительно. Именно уравнения Лотки были взяты Вольгерра за основу, когда он разрабатывал свою экологическую модель. Можно переформулировать модель Лотки в экологических терминах.

Пусть A обозначает траву, X — травоядных жертв, Y — живых хищников, а B — мертвых хищников. Первое уравнение системы (3.6) означает, что жертвы размножаются, поедая траву. Второе — хищники размножаются, поедая жертвы. Третье уравнение описывает смерть хищников. Естественно, все три процесса необратимы.

В связи с тем, что одна и та же система дифференциальных уравнений (3.7) описывает и химические и экологические процессы, часто в литературе ее называют системой уравнений Вольгерра—Лотки.

Предельные циклы и автоколебания

До сих пор мы рассматривали системы с изолированными особыми точками. Возможны, однако, ситуации, когда в системе имеются *изолированные траектории*, т. е. такие замкнутые траектории, в окрестности которых нет других замкнутых траекторий. Замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям. Мы уже сталкивались с замкнутыми траекториями, когда рассматривали особую точку центр. Но в случае центра замкнутые траектории *целиком* заполняли всю фазовую плоскость, т. е. не являлись изолированными. Изолированные замкнутые траектории соответствуют явлениям разной природы. Такие процессы называют автоколебаниями.

§ 1. Предельные циклы

1.1. Вводные примеры

Изучение предельных циклов мы начнем с нескольких простых примеров.

Пример 1. Система с устойчивым предельным циклом.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \right], \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Система имеет очевидную особую точку $(0, 0)$. Определим характер этой особой точки. Вблизи начала координат $(x_1 \approx 0, x_2 \approx 0)$

ограничимся только линейными слагаемыми. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2.$$

Корни характеристического уравнения находим из условия

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Корни комплексно сопряженные с положительными действительными частями, следовательно, особая точка — неустойчивый фокус.

Теперь попытаемся выяснить, имеет ли система еще какие-либо особенности. Умножим первое уравнение на x_1 , а второе на x_2 .

$$x_1 \dot{x}_1 = -x_1 x_2 + x_1^2 [1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}],$$

$$x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2^2 [1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}].$$

Сложим полученные уравнения

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2) [1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}].$$

Перепишем левую часть в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2.$$

Введем обозначения $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, тогда (переходя к полярным координатам $x_1 = R \sin \theta$, $x_2 = R \cos \theta$)

$$\frac{d(R^2)}{dt} = 2R^2(1 - R) \Rightarrow \frac{dR}{dt} = R(1 - R).$$

Теперь умножим первое уравнение системы (4.1) на x_2 , а второе — на x_1 . Вычтем из второго уравнения первое

$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 = R^2.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x_2}{x_1},$$

то дифференцируя это выражение получаем

$$\frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2}{x_1^2}.$$

Но

$$\cos^2 \theta = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

таким образом

$$\dot{\theta} = \frac{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2}{R^2}.$$

Откуда $\dot{\theta} = 1$.

Фактически, мы совершили переход к полярным координатам¹⁾. Все точки $R = 1$ соответствуют нулевому значению производной, поэтому мы вправе назвать окружность единичного радиуса *особой траекторией*. Движение по этой окружности происходит с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta} = 1$. Окружность $R = 1$ делит фазовую плоскость на две части. Во внешней части $\dot{R} < 0$, т. е. фазовые траектории приближаются к окружности извне. Во внутренней области ($R < 1$) $\dot{R} > 0$, т. е. фазовые траектории раскручиваются от центра, приближаясь к окружности. Таким образом, с течением времени все фазовые траектории неограниченно приближаются к окружности единичного радиуса.

Фазовый портрет системы представлен на рис. 4.1.

¹⁾ Переход к полярным координатам часто используется для доказательства существования предельного цикла. Тем не менее, для многих систем такой переход не позволяет найти предельный цикл.

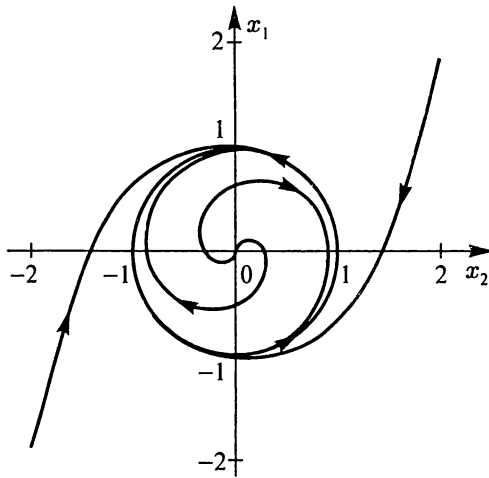


Рис. 4.1. Фазовый портрет системы с устойчивым предельным циклом

Пример 2. Система с неустойчивым предельным циклом.

Рассмотрим еще один пример.

$$\dot{r} = r(r - 1)(r - 2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Здесь r и θ — полярные координаты. Очевидно, что система имеет две особые траектории. Это окружности радиуса 1 и 2. На этих окружностях $\dot{r} = 0$. Кроме того, в различных областях производная имеет различные знаки:

$$\begin{aligned} \dot{r} &> 0, & \text{если } r > 2, \\ \dot{r} &< 0, & \text{если } 1 < r < 2, \\ \dot{r} &> 0, & \text{если } r < 1. \end{aligned}$$

То есть фазовые траектории приближаются от начала координат к единичной окружности, удаляются от окружности радиуса 2 на бесконечность либо к окружности меньшего радиуса (рис. 4.2). Таким образом, внешняя окружность является неустойчивым предельным циклом, а внутренняя — устойчивым.

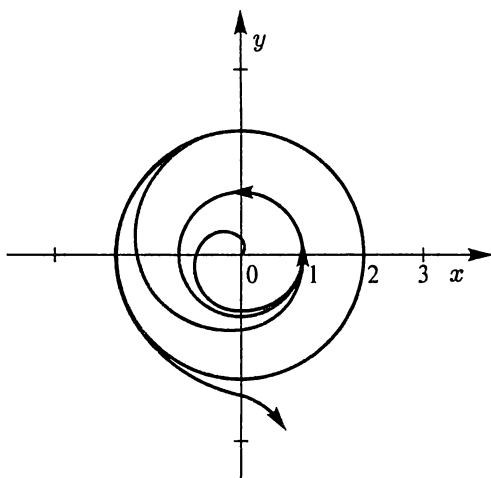


Рис. 4.2. Фазовый портрет системы с двумя предельными циклами. Внутренний цикл устойчивый, внешний неустойчивый

Пример 3. Полуустойчивый предельный цикл.

Рассмотрим еще одну систему, для которой легко доказать существование предельного цикла,

$$\dot{r} = r(r - 1)^2, \quad \dot{\theta} = 1.$$

Здесь вновь r и θ — полярные координаты. Производная \dot{r} обращается в ноль при $r = 1$ и положительна в остальных точках плоскости:

$$\dot{r} > 0, \quad \text{если } r > 1,$$

$$\dot{r} > 0, \quad \text{если } 0 < r < 1.$$

Таким образом, фазовые траектории приближаются к окружности единичного радиуса изнутри и удаляются от нее снаружи (рис. 4.3).

1.2. Классификация предельных циклов

В ряде физических, химических, биологических и других систем могут возникать незатухающие колебания, амплитуда и пе-

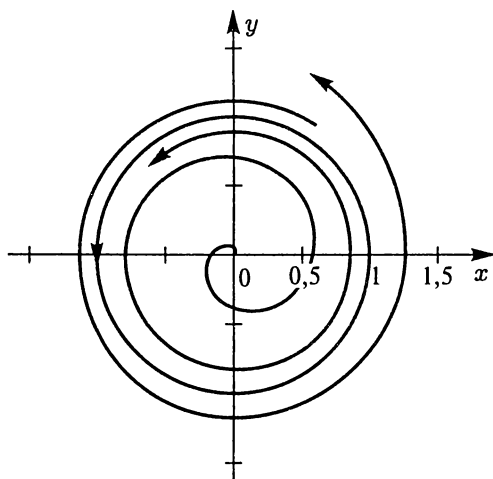


Рис. 4.3. Фазовый портрет системы с полуустойчивым предельным циклом

риод которых не зависят от начальных условий. Во всяком случае, изменение начальных условий в широких пределах не оказывает влияния на характер колебаний.

На фазовой плоскости автоколебаниям соответствуют *предельный цикл* — замкнутая траектория, на которую наматываются все фазовые траектории из некоторой окрестности. Таким образом, предельный цикл является *аттрактором*. Однако, в отличие, например, от фокуса, это не изолированная особая точка, а *изолированная особая траектория*.

Различают *устойчивые предельные циклы*, когда все фазовые траектории из некоторой трубчатой окрестности стремятся к нему при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 4.1), т. е. фазовые траектории наматываются на предельный цикл с двух сторон; *неустойчивые предельные циклы*, когда все фазовые траектории стремятся к предельному циклу при $t \rightarrow -\infty$, т. е. фазовые траектории сматываются с предельного цикла (рис. 4.2); *полуустойчивые*, когда с одной стороны фазовые траектории наматываются на предельный цикл (стремятся к нему при $t \rightarrow +\infty$), а с другой стороны сматываются (стремятся к предельному циклу при $t \rightarrow -\infty$) (рис. 4.3).

§ 2. Автоколебания в физических, химических и биологических системах

Автоколебания — незатухающие колебания в диссипативных нелинейных системах, которые поддерживаются за счет внешнего источника энергии. Вид и свойства этих колебаний (частота, амплитуда, форма) определяются самой системой и не зависят от начальных условий. Характерная особенность автоколебаний — отсутствие внешнего периодического воздействия.

Схематично автоколебательную систему можно представить в виде источника энергии, осциллятора с затуханием и обратной связи (нелинейного элемента) (рис. 4.4).

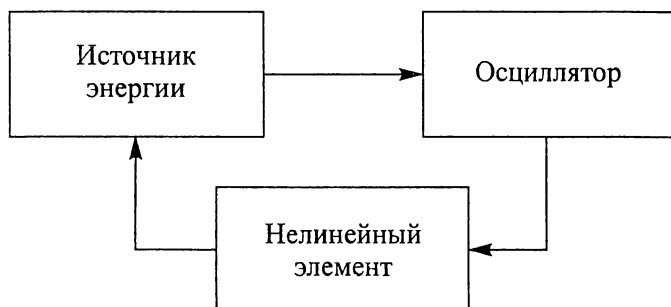


Рис. 4.4. Схематичное изображение автоколебательной системы

Осциллятор сам регулирует поступление энергии от внешнего источника, что отличает автоколебания от вынужденных колебаний, когда внешний источник определяет, когда и сколько энергии передать осциллятору, задавая тем самым частоту, амплитуду, фазу и форму колебаний. При автоколебаниях, благодаря наличию нелинейного элемента обеспечивается согласование подачи энергии с работой осциллятора. Автоколебания окружают нас повсюду в природе и технике: часы, звучащая скрипичная струна или органная труба, бьющееся сердце — все эти системы совершают автоколебания.

2.1. Качественное рассмотрение автоколебательных систем

Пример 1. Звучание скрипичной струны.

Хорошо известно, что сила трения скольжения практически не зависит от скорости. Однако именно благодаря очень слабой зависимости силы трения от скорости звучит скрипичная струна. Качественный вид зависимости силы трения смычка о струну показан на рис. 4.5.

Благодаря силе трения покоя струна захватывается смычком и смещается из положения равновесия. Когда сила упругости превысит силу трения, струна оторвется от смычка и устремится к положению равновесия со все возрастающей скоростью. Скорость струны относительно движущегося смычка будет возрастать, сила трения увеличится и в определенный момент станет достаточной для захвата струны. Затем процесс повторится вновь. Таким образом, движущийся с постоянной скоростью смычок, вызовет незатухающие колебания струны.

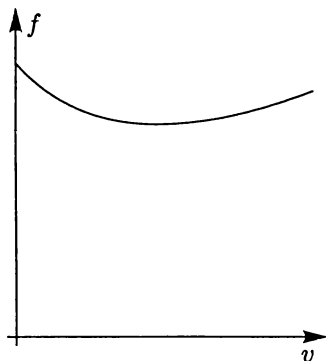


Рис. 4.5. Схематичное изображение зависимости силы трения скольжения от скорости

Пример 2. «Перемежающийся источник».

С древнейших времен люди используют систему регулировки уровня воды, представленную на рис. 4.6.

Вода поступает с постоянной скоростью по трубе 1 в сосуд. Когда уровень воды в сосуде превысит высоту h_2 , вода начнет выливаться через сифон 2, пока ее уровень не опустится до высоты h_1 . Простейшая система обеспечивает колебания уровня воды в сосуде (периодическое выливание воды строго определенными порциями), в то время, как вода поступает в сосуд равномерно.

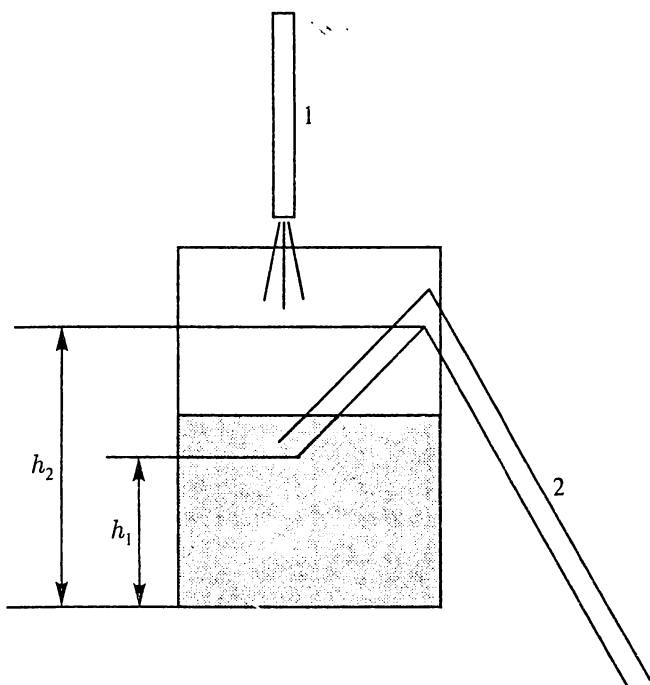


Рис. 4.6. Перемежающийся источник — одна из древнейших рукотворных автоколебательных систем

Пример 3. Часы.

Хорошо известно, что работа механических часов обеспечивается закрученной пружинкой. Благодаря анкерному механизму маятник часов дважды за период колебаний получает толчки (порции энергии) от раскручивающейся пружины. Анкер — особый рычаг, насаженный на одну ось с маятником, — освобождает в нужный момент сжатую пружину и получает от нее энергию.

2.2. Количественное рассмотрение автоколебаний

Пример 4. Механическая система.

Рассмотрим систему, представленную на рис. 4.7. Брусок массы m , лежащий на ленте транспортера, прикреплен к стене гори-

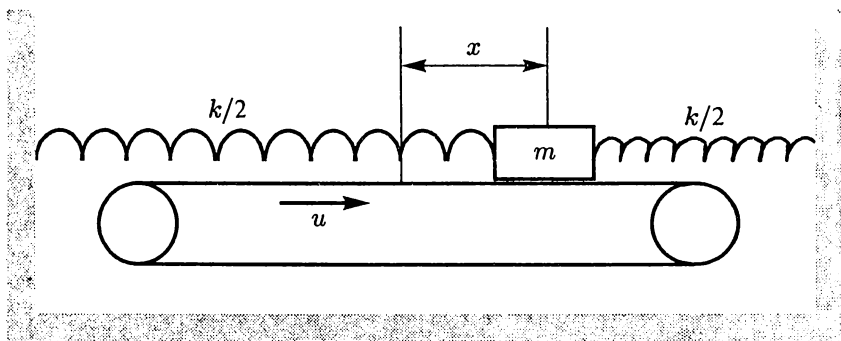


Рис. 4.7. Автоколебания в системе с сухим трением

горизонтальными пружинами с коэффициентами жесткости $k/2$. Лента транспортера движется с постоянной скоростью u . Между бруском и лентой действует сила трения скольжения.

Эта модель может служить для описания колебаний скрипичной струны: лента — смычок, брусок с пружинами — струна. Запишем второй закон Ньютона для бруска

$$ma = -kx - rv + f.$$

Первое слагаемое в правой части уравнения описывает силы упругости, второе — силу вязкого трения (v — скорость бруска, r — коэффициент сопротивления), последнее слагаемое — сила трения скольжения, которая зависит от скорости бруска относительно ленты:

$$f = f(u - v) = f(u - \dot{x}).$$

Будем полагать, что характер зависимости силы трения от относительной скорости соответствует рис. 4.5. Силу трения можно представить в виде ряда, полагая, что относительные скорости не очень велики,

$$f(u - \dot{x}) \approx f_0 + f_1 \dot{x} + f_2 \dot{x}^2 + \dots \quad (4.2)$$

Ограничившись первыми двумя членами разложения, можно записать уравнение движения бруска в виде

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + \omega^2 y = 0,$$

где $y = x - f_0/k$ — смещение бруска из положения равновесия на ленте,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{r - f_1}{m}.$$

Полученное уравнение формально ничем не отличается от уравнения затухающих колебаний. Однако декремент затухания в нашем случае может быть как положительным, так и отрицательным. Очевидно, что при отрицательном значении декремента затухания в системе возникнут нарастающие по экспоненте колебания. В этом случае говорят, что система с «отрицательным трением». Условием возбуждения в системе нарастающих колебаний является $f_1 > r$.

В линейной системе ничто не мешает экспоненциально увеличиваться амплитуде колебаний до бесконечности. Однако при больших амплитудах колебаний относительная скорость бруска становится большой, и в разложении (4.2) уже нельзя ограничиваться только двумя первыми членами, т. е. система становится нелинейной. Именно благодаря нелинейности в системе происходит установление колебаний конечной амплитуды.

Учет следующего слагаемого в разложении силы сопротивления (4.2) приводит к нелинейному уравнению.

Пример 5. Ламповый генератор.

На рис. 4.8 изображена схема лампового генератора с контуром в цепи сетки. Это всего лишь одна из возможных схем генератора (например, катушка может быть включена в цепь анода, вакуумный триод может быть заменен полупроводниковым — транзистором). Если бы триод T отсутствовал, то в контуре RLC могли бы возникнуть затухающие электромагнитные колебания. Однако благодаря индуктивной связи с коэффициентом взаимной индукции M между катушками L и L' , на сетку триода подается переменное напряжение, которое регулирует ток через триод и обеспечивает поступление энергии в колебательный контур.

По правилам Кирхгофа для колебательного контура можно записать

$$-U - IR = -L \frac{dI}{dt} - M \frac{dI'}{dt},$$

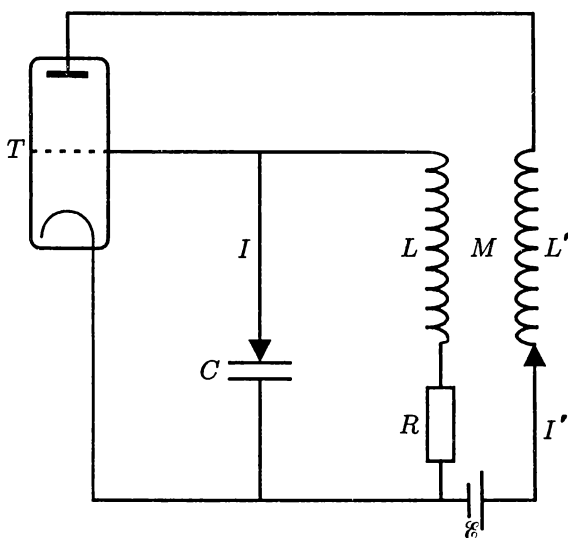


Рис. 4.8. Одна из возможных схем лампового генератора

где

$$I = -\dot{q} = -C\dot{U}, \quad \dot{I} = -C\ddot{U}, \quad \frac{dI'}{dt} = \frac{dI'}{dU} \frac{dU}{dt} = S(U)\dot{U}.$$

Величина $S(U)$ называется сеточной характеристикой лампы — это величина, обратная дифференциальному сопротивлению лампы. С учетом введенных обозначений

$$LC\ddot{U} - MS(U)\dot{U} + RC\dot{U} + U = 0.$$

Полученное уравнение напоминает уравнение затухающих колебаний в контуре. Если $RC - MS < 0$, то система имеет отрицательное сопротивление, и колебания в ней будут нарастать. В связи с тем, что S — функция напряжения, система является нелинейной, и при определенной амплитуде колебаний произойдет стабилизация. Будем полагать, что для аппроксимации сеточной характеристики достаточно двух слагаемых: $S(U) \approx S_0 - S_2U^2$,

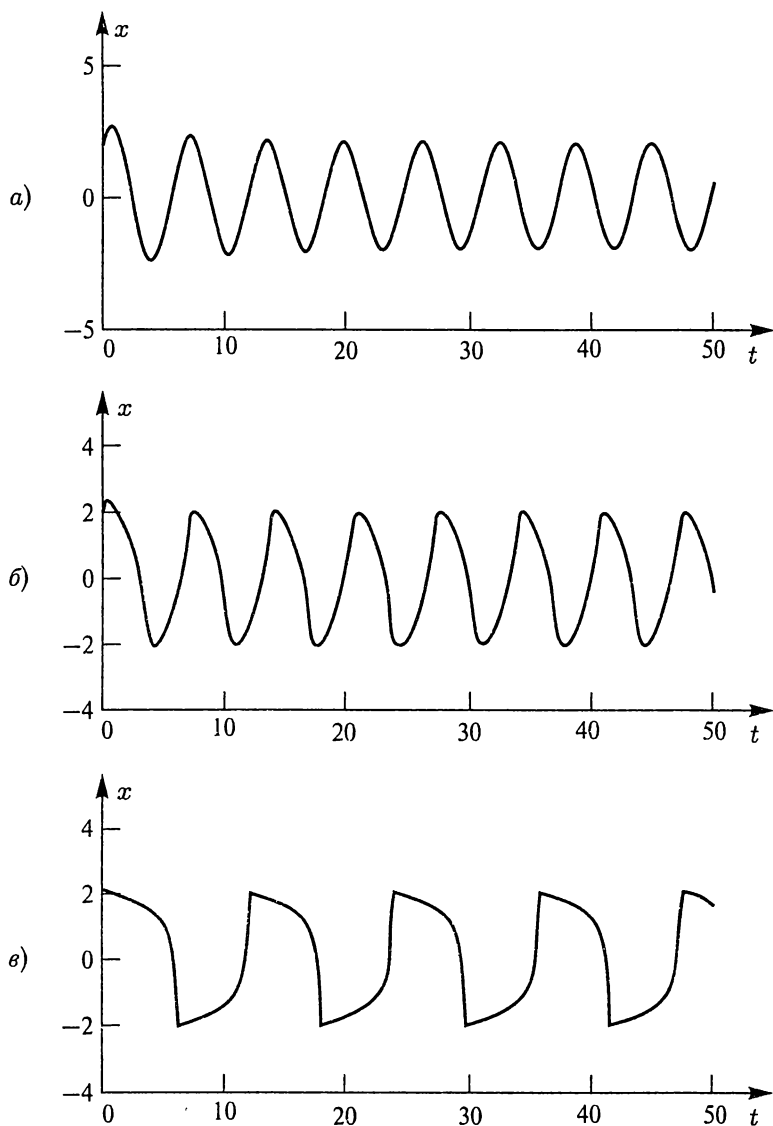


Рис. 4.9. а) Квазигармонические колебания; б) несинусоидальные колебания; в) релаксационные колебания

и введем обозначения

$$\alpha = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad \beta = \frac{2MS_2}{RC - MS_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Тогда

$$\ddot{U} - \alpha(1 - \beta U^2)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение автоколебаний (4.3) обычно записывают в безразмерном виде. Вводя новые переменные

$$\tau = \omega_0 t, \quad x = \sqrt{\beta} U, \quad \mu = \alpha \omega_0,$$

получаем

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) называется *уравнением Ван дер Поля*.

При $\mu \ll 1$ в системе возникают квазигармонические автоколебания (рис. 4.9 а), при $\mu \approx 1$ — сильно несинусоидальные колебания (рис. 4.9 б) и при $\mu \gg 1$ — релаксационные колебания (рис. 4.9 в).

Фазовая траектория автоколебаний представлена на рис. 4.10. Независимо от начальных условий все фазовые траектории стягиваются к *предельному циклу* — замкнутой траектории, соответствующей стационарному режиму. В нашем случае автоколебания устанавливаются в системе при любых начальных условиях, в том числе и при нулевых начальных значениях тока и напряжения. Такой режим возбуждения автоколебаний называется *мягким*.

Существуют системы, в которых автоколебания

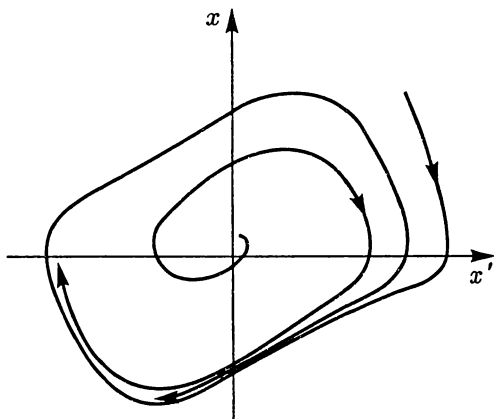
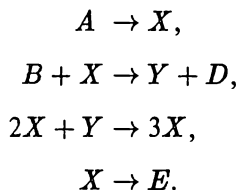


Рис. 4.10. Пример фазового портрета автоколебательной системы

могут возникнуть только в результате начального толчка не менее определенной величины. Такой режим возбуждения колебаний называется *жестким*. Понятно, что линия, разделяющая области начальных значений, соответствующие затухающим колебаниям и автоколебаниям, является неустойчивым предельным циклом. То есть характерной особенностью систем с жестким возбуждением является наличие двух предельных циклов.

Пример 6. Колебательные процессы в химических реакциях.

В 1971 г. Лефевр и Николис предложили модель, описывающую колебательные процессы в химической реакции. Они рассмотрели цепочку химических превращений



Предполагается, что концентрации веществ A , B , D , E остаются постоянными и обратных реакций нет.

Тогда кинетические уравнения запишутся следующим образом:

$$\dot{x} = a - (b + 1)x + x^2y, \quad (4.5)$$

$$\dot{y} = bx - x^2y. \quad (4.6)$$

Найдем особые направления, приравняв производные к нулю:

$$a - (b + 1)x + x^2y = 0, \quad (4.7)$$

$$bx - x^2y = 0. \quad (4.8)$$

Фазовые траектории пересекают линию $y = ((b + 1)x - a)/x^2$ в вертикальном направлении, а линию $y = b/x$ — в горизонтальном. Система имеет единственную особую точку $-(a, b/a)$. Определим характер этой особой точки. Введем новые переменные

$$x = \tilde{x} + a \quad \text{и} \quad y = \tilde{y} + \frac{b}{a}.$$

И ограничимся только слагаемыми первого порядка малости:

$$\dot{\tilde{x}} = a^2 \tilde{y} + \tilde{x}(b-1), \quad (4.9)$$

$$\dot{\tilde{y}} = -b\tilde{x} - a^2 \tilde{y}. \quad (4.10)$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} b-1-\lambda & a^2 \\ -b & -a^2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda(1-b+a^2) + a^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-(a^2 - b + 1) \pm \sqrt{(a^2 - b + 1)^2 - 4a^2} \right).$$

Если $a^2 - b + 1 < 2a$, то особая точка — фокус, иначе — узел. Если выражение $a^2 - b + 1$ больше нуля, то особая точка устойчивая, а если меньше, то неустойчивая. В случае неустойчивой особой точки в данной системе имеется так же и предельный цикл (см. рис. 4.11).

При $a^2 - b + 1 = 0$ происходит *качественное* изменение фазового портрета. Такое изменение носит название *бифуркация*. При бифуркации происходит смена топологической структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории при малом изменении параметров системы.

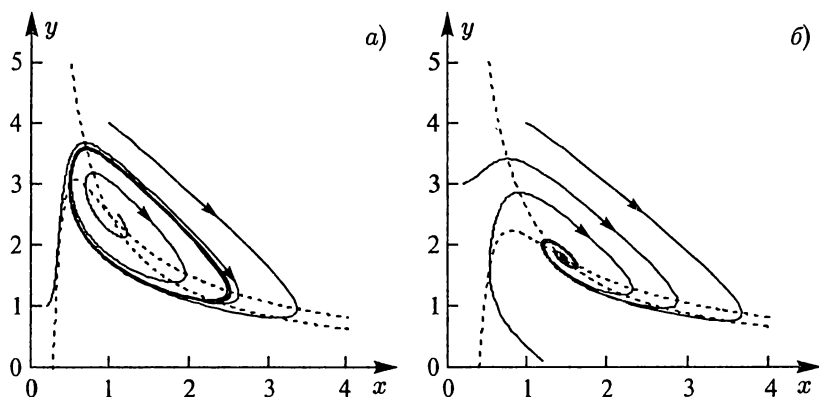


Рис. 4.11. Фазовые портреты модели Лефевра

Понять, что такое топологическая эквивалентность можно на следующем примере. Пусть фазовый портрет системы нарисован на куске резины. Если мы начнем деформировать этот лист, не допуская его разрывов, то фазовый портрет изменится. Тем не менее, цикл останется циклом, аттрактор — аттрактором, т. е. качественные особенности фазового портрета сохранятся. Говорят, что новый (деформированный) фазовый портрет топологически эквивалентен исходному.

Пример 7. Модель Холлинга—Тэннера.

В биологии рассматривается еще одна модель, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв. Это модель Холлинга—Тэннера. Будем обозначать количество жертв x_1 , а количество хищников — x_2 . В модели предполагается, что для поддержания жизни одного хищника требуется J жертв. Это предположение представляется очень разумным, так как добычей хищника становятся в первую очередь больные и слабые животные. Не случайно хищников называют санитарями. Понятно, что если жертв очень мало, то охота требует от хищников все больших усилий. При некоторой численности жертв энергетические затраты на охоту перестают восполняться, хищники вымирают.

С другой стороны, предполагается, что хищник перестает убивать, когда насыщается. (Сравните с моделью Вольтерра—Лотки (§ 3 главы 2), где прожорливость хищников была бесконечной.)

В свою очередь, динамика популяции жертв описывается в отсутствии хищников логистическим уравнением. Наличие хищников приводит к появлению в уравнении слагаемого $\omega x_1 x_2 / (D + x_1)$. Это слагаемое описывает убыль жертв в связи с охотой хищников.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) x_1 - \frac{\omega x_1 x_2}{D + x_1}, \\ \dot{x}_2 = S \left(1 - \frac{J x_2}{x_1} \right) x_2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Найдем особые точки системы. Из первого уравнения системы (4.11) следует, что $\dot{x}_1 = 0$, если $x_1 = 0$ (этот случай мы рассматривать не будем, так как он соответствует полному отсутствию жертв

в системе, что противоречит условия модели) или

$$x_2 = \frac{r}{\omega} \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) (D + x_1). \quad (4.12)$$

Полученное уравнение — уравнение параболы — определяет особую линию, которую фазовые траектории пересекают в вертикальном направлении. Точки пересечения параболы с осью x_1 — $-D$ и K . Абсцисса вершины — $(K - D)/2$.

Из второго уравнения системы (4.11) находим, что $\dot{x}_2 = 0$, если $x_2 = 0$ или

$$x_2 = \frac{x_1}{J}. \quad (4.13)$$

Первая ситуация соответствует полному отсутствию хищников. В этом случае количество жертв описывается логистическим уравнением, и их численность стабилизируется при величине K . Интерес представляет вторая ситуация. Уравнение (4.13) определяет второе особое направление: фазовые траектории пересекают эту прямую горизонтально.

Особые линии (4.12) и (4.13) имеют две точки пересечения. По условию задачи смысл имеет только точка с положительными координатами. Обозначим ее (x_1^*, x_2^*) . Изменим масштаб переменных, разделив их на x_1^* .

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1^*}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1^*}.$$

В новых переменных уравнение (4.11) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = r \left(1 - \frac{y_1}{k} \right) y_1 - \frac{\omega y_1 y_2}{d + y_1}, \\ \dot{y}_2 = S \left(1 - \frac{J y_2}{y_1} \right) y_2, \end{cases} \quad (4.14)$$

где $k = K/x_1^*$, $d = D/x_1^*$. Особая точка после изменения масштаба имеет координаты $(y_1^*, y_2^*) = (x_1^*/x_1^*, x_2^*/x_1^*) = (1, y_2^*)$. Подставив значение $y_1^* = 1$ во второе уравнение системы (4.14), получаем

$y_2^* = J^{-1}$. Из первого уравнения находим, что

$$y_2^* = \frac{r}{\omega k}(k-1)(d+1).$$

Проведем линеаризацию системы (4.14) вблизи особой точки, перейдя к переменным $\tilde{y}_1 = y_1 - y_1^*$ и $\tilde{y}_2 = y_2 - y_2^*$,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = r \left(-\frac{1}{k} + \frac{\omega}{rJ(1+d)^2} \right) \tilde{y}_1 - \frac{\omega}{1+d} \tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = \frac{S}{J} \tilde{y}_1 - S \tilde{y}_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Определитель матрицы коэффициентов системы (4.15)

$$rS \left(\frac{1}{k} + \frac{\omega d}{rJ(1+d)^2} \right) > 0,$$

а след $r(k-d-2)(k(1+d))^{-1} - S$ может иметь любой знак. Это значит, что особая точка системы может быть как устойчивым (рис. 4.12 а), так и неустойчивым (рис. 4.12 б) фокусом (узлом). В случае неустойчивой особой точки в системе имеется предельный цикл.

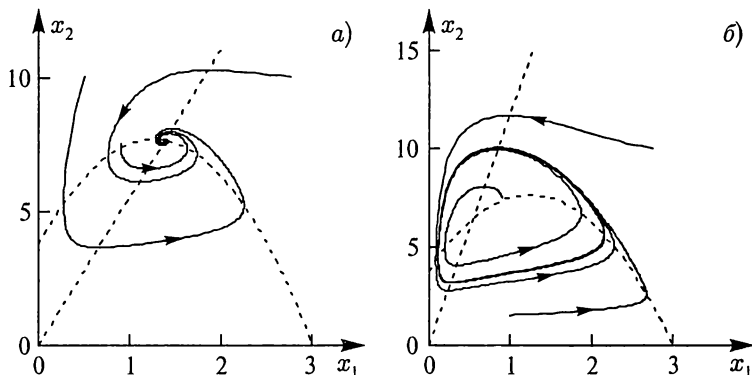


Рис. 4.12. Возможные фазовые портреты системы Холлинга—Тэннера. Особая точка — устойчивый фокус, предельного цикла нет (а). Особая точка — неустойчивый фокус, имеется предельный цикл (б)

Самоорганизация и образование структур

От существующего к возникающему.

И. Пригожин

§ 1. Распределенные системы

До сих пор мы рассматривали модели, в которых некоторые величины зависели только от времени, при этом распределение величин в пространстве полностью игнорировалось. Такие модели называют *точечными*. Например, изучая динамику биологических популяций, мы совершенно не учитывали тот факт, что животные могут перемещаться в пространстве стаями (стадами, косяками), образуя, например, скопления в некоторых местах. Изучая динамику химических реакций, мы не учитывали, что превращения происходят в некотором объеме, и концентрации реагентов в различных частях сосуда, вообще говоря, могут быть различными. Теперь рассмотрим модели, где переменные изменяются не только во времени, но и в пространстве. Такие модели называются *распределенными*.

Мы займемся изучением систем, в которых могут возникать устойчивые пространственные неоднородные структуры, возникающие в результате развития неустойчивостей в однородной диссипативной среде. Такие структуры принято называть *диссипатив-*

ными. Основы теории диссипативных структур заложил в 1952 г. Алан М. Тьюринг, а сам термин предложил Нобелевский лауреат И. Р. Пригожин. Основные результаты в исследовании свойств распределенных систем получены на так называемых «базовых моделях» с двумя переменными

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= P(x, y) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= Q(x, y) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Уравнения (5.1) называют *уравнениями диффузионного типа*. Оказалось, что эта простая модель может качественно описать процессы самопроизвольного возникновения волн и структур в распределенных системах, т. е. процессы самоорганизации. Они осуществляются, когда в системе возникают неустойчивости, приводящие к потере исходного распределения веществ во времени и пространстве. Вместо этого устанавливается новый тип распределения вещества во времени и пространстве, т. е. происходит самоорганизация системы. Например, потеря устойчивости стационарного пространственно однородного распределения веществ в химической реакции может привести к тому, что вместо него в системе появятся автоволны — периодические самоподдерживающиеся волны химической активности.

В зависимости от вида функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и коэффициентов диффузии D_i в системах могут возникать следующие типы поведения переменных или виды самоорганизации.

1. Распространяющиеся возмущения в виде бегущего импульса.
2. Стоячие волны.
3. Синхронные автоколебания разных элементов во всем пространстве.
4. Квазистохастические волны, которые получаются при случайном возмущении разности фаз автоколебаний в двух точках пространства.
5. Стационарные неоднородные распределения переменных в пространстве — диссипативные структуры.

6. Генерация волн автономными источниками импульсной активности. В качестве источников волн могут быть, например, локальные кратковременные флуктуации переменных.

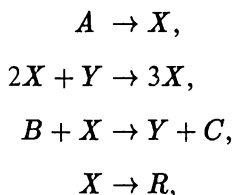
Общим условием развития процессов самоорганизации является появление неустойчивости в исходной распределенной системе. Такие неустойчивости возникают, если отклонение от состояния равновесия превышает критическое значение. В частности, появление неустойчивости типа седла вызывает появление диссипативных структур, а появление неустойчивого узла может вызвать возникновение бегущих волн конечной амплитуды или стоячих волн. Диссипативная структура, возникающая в результате неустойчивости в распределенной системе, поддерживается за счет постоянного притока энергии и вещества и может наблюдаться только в открытых системах. В этом ее отличие от обычных равновесных структур. Для возникновения диссипативных структур необходимо, чтобы уравнения, описывающие процессы в системе, были нелинейны. Кроме того, процессы в системе должны протекать согласованно. Последнее требование послужило основанием для Г. Хакена назвать *синергетикой* (от греческого — совместный, согласованно действующий) новую междисциплинарную область науки, занимающуюся изучением процессов образования структур. Скачкообразный переход между диссипативными структурами различной формы, который индуцируется при увеличении длины реакционного сосуда, отражает принципиальную особенность процесса деления клетки. Образование такого рода диссипативных структур лежит в основе дифференцировки тканей при морфогенезе.

§ 2. Брюсселятор

Брюсселятор или *тримолекулярная модель* была предложена Пригожиным и Лефевром в 1968 г. и представляет собой наиболее исследованную систему, которая при разных значениях параметров может обладать разнообразным поведением во времени и пространстве. На этой модели удастся выявить условия возникновения

типов самоорганизации в биологических и химических системах, и в этом смысле данная модель является базовой.

Брюсселятор представляет собой следующую схему гипотетических химических реакций, происходящих в тонком и длинном (одномерном) сосуде:



где A, B — исходно заданные вещества, распределенные в трубке равномерно, и их запас велик; вещества R и C выпадают в виде осадка. Вещества X и Y диффундируют вдоль трубки и участвуют в химическом процессе. Эту систему реакций, но без диффузии, мы уже рассматривали при изучении автоколебательных химических реакций (см. раздел 2.2 из § 2 главы 1). С учетом диффузии система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a + x^2 y - (b + 1)x + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= bx - x^2 y + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Приведем результаты исследования типов поведения модели (5.2) в зависимости от соотношений параметров (a, b, D_x, D_y). Точечная модель ($D_x = D_y = 0$) обладает стационарной точкой $\tilde{x} = a$, $\tilde{y} = b/a$. При $b < 1 + a^2$ эта точка представляет собой устойчивый фокус или узел, а при $b > 1 + a^2$ — неустойчивый фокус или узел, вокруг которого в точечной системе образуется предельный цикл.

В распределенной системе (5.2) возможно появление неустойчивости седлового типа, которая приводит к развитию возмущений в пространственно однородной системе и установлению в ней пространственно неоднородных стационарных режимов. При определенных размерах трубки и длинах волн, определяющих характер

неоднородностей или изрезанности пространства, в системе возможно возникновение периодических диссипативных структур, не зависящих от времени. Для их появления необходимо, чтобы коэффициенты D_x и D_y были существенно различны, а параметры a и b не слишком далеки от своих бифуркационных значений. Кроме того, в брюсселяторе возможны также и автоволновые процессы типа стоячей и бегущей волны. Непрерывное изменение параметров приводит к тому, что одни диссипативные структуры сменяют другие.

Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} &= a^2 \tilde{y} + (b + 1) \tilde{x} + D_x \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} &= -a^2 \tilde{y} - b \tilde{x} + D_y \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r^2}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Будем искать решение системы (5.3) в виде концентрационных волн

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= A \exp \{pt - ikr\}, \\ \tilde{y} &= B \exp \{pt - ikr\},\end{aligned}\tag{5.4}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны. Подставим решения в виде концентрационных волн в линеаризованное уравнение. Дисперсионное уравнение — зависимость длины волны от частоты — имеет вид

$$p^2 - \Theta p + \Delta = 0,\tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned}\Theta &= b - 1 - a^2 - k^2(D_x + D_y), \\ \Delta &= k^4 D_x D_y + k^2 a^2 D_x - k^2 D_y (b - 1) + a^2.\end{aligned}$$

Если стационарное (не зависящее от времени) однородное решение устойчиво, то концентрационные волны будут затухать со временем. Это произойдет, если p — комплексная величина с отрицательной действительной частью. Если же действительная

часть положительна или решением уравнения (5.5) будут два действительных числа с разными знаками, то колебания концентрации будут возрастать. Именно последнюю ситуацию — неустойчивость седлового типа — исследовал Тьюринг. Неустойчивость седлового типа возникнет, если $\Delta < 0$. Границы области существования такого решения задаются уравнением

$$k_{1,2}^2 = \frac{-a^2 D_x + (b-1) D_y \pm \sqrt{(-a^2 D_x + (b-1) D_y)^2 - 4a^2 D_x D_y}}{2D_x D_y}. \quad (5.6)$$

Кроме того, в брюсселяторе могут возникать устойчивые пространственные структуры и в том случае, когда соотношение параметров соответствует наличию предельного цикла в точечной системе.

Рассматриваемая одномерная модель может быть обобщена и на случай большего числа пространственных переменных. В этом случае система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a + x^2 y - (b+1)x + D_x \Delta x, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= bx - x^2 y + D_y \Delta y, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots$$

— оператор Лапласа. Компьютерное моделирование двумерного случая показывает, что в системе могут возникать разнообразные структуры: соты, полосы, зигзаги и т. д.

Фракталы

Почему геометрию так часто называют «холодной» и «сухой»? Одна из причин — ее неспособность описать форму облака, горы, дерева или береговой линии. Облака не являются сферами, горы — конусами, береговые линии нельзя изобразить с помощью окружностей, кору деревьев не назовешь гладкой, а путь молнии — прямолинейным... Природа демонстрирует не просто более высокую степень, но совершенно иной уровень сложности. Число различных масштабов длин в естественных формах можно считать бесконечным для каких угодно практических задач. Существование таких феноменов бросает нам вызов и побуждает заняться подробным изучением тех из форм, которые Евклид отложил в сторону из-за их «бесформенности» — исследовать, так сказать, морфологию «аморфного». Математики же пренебрегли этим вызовом и предпочли бежать от природы путем изобретения всевозможных теорий, которые никак не объясняют того, что мы видим или ощущаем.

Бенуа Мандельброт.

Фрактальная геометрия природы

Вообще-то, читать эту главу совсем не обязательно — в ней мы совсем не будем говорить о математических моделях. Эта глава лежит несколько в стороне от основной темы. В то же время, фракталы — это то понятие, с которым мы постоянно будем встречаться в последующих главах, рассматривая, например, хаотическое поведение систем, поэтому было бы хорошо разобраться, что же это такое, прежде, чем мы начнем его применять.

§ 1. Фракталы в математике

— Конечно же, они откликаются на свои имена? — небрежно заметил Комар.

— Никогда не знала, что они это делают.

— Что проку им иметь имена, если они не откликаются на них? — сказал Комар.

— Им никакого проку, — сказала Алиса. — Но я полагаю, это нужно людям, которые их называют. Иначе зачем же тогда вещи вообще имеют имена?

Льюис Кэрролл. Алиса в Зазеркалье

Этот диалог Алисы и Комара очень поучителен. Действительно, для человека очень важно назвать предмет, выделить его из общей массы, объединить с подобными ему. Лишь после того, как в 1976 г. Бенуа Б. Мандельброт написал свою первую книгу по фракталам, стало ясно, что огромное количество странных объектов, давно известных людям, представляют собой различные проявления фракталов.

Мандельброт назвал фракталами структуры, состоящие из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Странные математические объекты — «математические монстры» — привлекли внимание ученых еще в XIX веке. В 1883 г. Георг Кантор описал множество, которое теперь называют *множеством Кантора* или *пылью Кантора*.

Рассмотрим отрезок единичной длины. Разделим его на три части и удалим из него открытую среднюю треть, оставив ее концевые точки. Получим два отрезка длиной по $1/3$ каждый. Вырежем среднюю треть из каждого отрезка и будем повторять эту процедуру с вновь полученными отрезками до бесконечности (рис. 6.1). Полученное в бесконечном пределе множество называется множеством Кантора и обладает рядом необычных свойств. Это множество имеет мощность континуума, в то же самое время его мера равна нулю. Каждый из фрагментов множества Кантора выглядит, как все множество в целом. Говорят, что множество Кантора *самоподобно*.

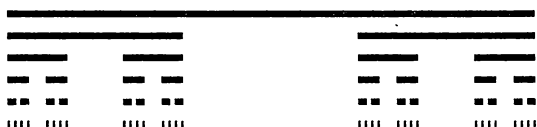


Рис. 6.1. Этапы построения множества Кантора

В 1886 г. Карл Вейерштрасс построил функцию, не имеющую производной ни в одной точке

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \cos(B^n \pi x),$$

где $0 < A < 1$, а произведение AB достаточно велико. График этой функции — бесконечно изломанная линия. При увеличении любой участок этой кривой выглядит подобно всей кривой. Можно построить множество разнообразных функций, подобных функции Вейерштрасса. В то время подобные функции представлялись чем-то аномальным. Эрмит писал Стильтесу в 1883 г.: «Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных».

В 1904 г. Хелге фон Кох рассмотрел необычную кривую. Часто ее приводят в курсе математического анализа как пример непрерывной, но недифференцируемой кривой. Рассмотрим отрезок единичной длины. Удалим из него среднюю треть

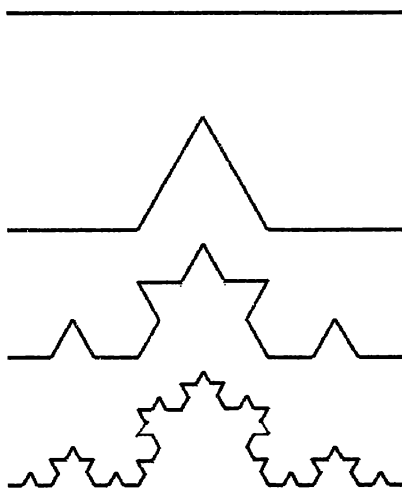


Рис. 6.2. Этапы построения кривой Коха

и дополним двумя отрезками длиной $1/3$. Отрезок превратился в ломанную из 4 звеньев. Применим ту же самую операцию к каждому из отрезков ломанной. Будем повторять эту процедуру бесконечное число раз (рис. 6.2). Можно построить снежинку

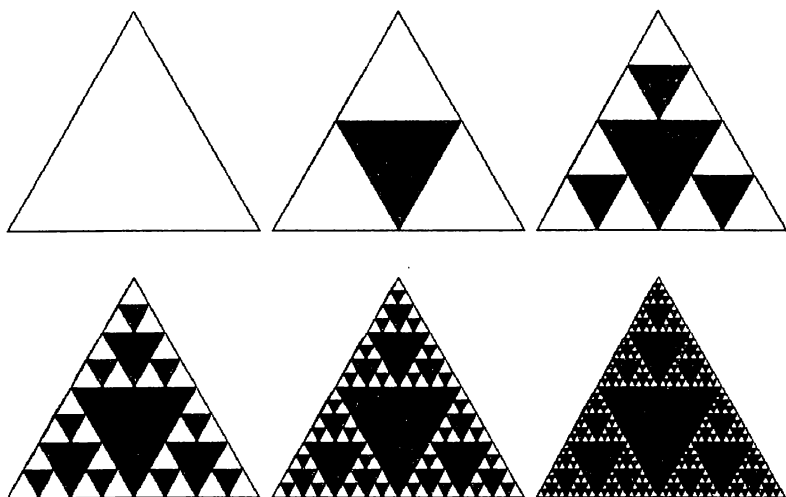


Рис. 6.3. Этапы построения прокладки Серпинского

или *остров Коха*, используя в качестве начального объекта, равносторонний треугольник. Легко понять, что такая снежинка или остров будут иметь бесконечный периметр, но ограничивать будут при этом конечную площадь.

В 1915 г. Вацлав Серпинский (Серпинский) придумал несколько интересных конструкций, названных в последствии его именем. *Прокладка* или *салфетка Серпинского* получается из равностороннего треугольника. Проведем в треугольнике средние линии и удалим ограниченную ими центральную часть треугольника. Повторим процедуру по отношению к каждому из полученных треугольников и так до бесконечности (рис. 6.3). Подобным же образом можно получить *ковер Серпинского*, используя в качестве исходного объекта квадрат. Можно построить и трехмерные аналоги этих объектов. Их часто называют *губками*.

В начале XX века Пьер Фату и Гастон Жюлиа исследовали свойства отображения $z_{n+1} = z_n^2 + c$ на комплексной плоскости. При фиксированном c в зависимости от выбора начального приближения пределом последовательности может быть либо ноль, либо бесконечность. Можно сказать, что ноль и бесконечность являются аттракторами. Граница, разделяющая области притяжения

этих двух аттракторов, называется *множеством Жюлиа*. Эта граница бесконечно изрезана и представляет собой фрактал (рис. 6.4).

Используя то же самое отображение, Бенуа Мандельброт выбирал фиксированную точку на комплексной плоскости и прослеживал ее судьбу при различных значениях параметра c , при этом возникали следующие ситуации:

1. Числа становились все меньше и меньше, их последовательность приближалась к нулю. Мы говорим, что нуль является аттрактором — в данном случае точкой притяжения для процесса.
2. Числа увеличиваются, стремясь к бесконечности, в этом случае бесконечность — аттрактор для процесса.
3. Специфический случай. Последовательности точек лежат на границе двух областей притяжения.

Данная граница имеет фрактальную структуру и является так называемым *странным аттрактором* для процесса. Если взглянуть на любой из ее поворотов или заливов, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет различные размеры. Фигура, находящаяся внутри этой границы, получила название *множество Мандельброта* (рис. 6.5).

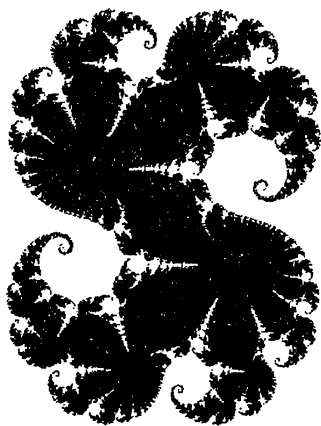


Рис. 6.4. Множество Жюлиа при $c = 0,27334 + 0,00742 i$

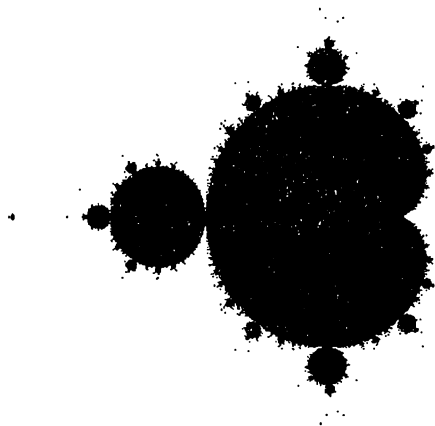


Рис. 6.5. Множество Мандельброта

§ 2. Размерности

2.1. Размерность самоподобия

Если разделить единичный отрезок на N равных частей длиной $l = 1/N$, то очевидно, длина исходного отрезка будет равна $1 = Nl$. Если разбить единичный квадрат на N равных квадратов со стороной $l = 1/N^{1/2}$, то, очевидно, площадь исходного квадрата будет равна $1 = Nl^2$. Если разбить единичный куб на N равных кубов со стороной $1/N^{1/3}$, то, очевидно, объем исходного куба будет равен $1 = Nl^3$. Во всех этих случаях выполнялось соотношение $Nl^d = 1$, где d — размерность самоподобия. В рассмотренных случаях она выражалась целым числом и совпадала с евклидовой размерностью. Размерность самоподобия может быть вычислена по формуле

$$d = -\frac{\ln N}{\ln l}.$$

Хотя мы записали натуральный логарифм, понятно, что основание не играет никакой роли: можно было бы записать десятичные логарифмы или логарифмы по основанию 2.

Найдем размерность самоподобия множества Кантора. Чтобы построить множество Кантора единичной длины нужно взять 2 множества длиной $1/3$, следовательно

$$d = -\frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309.$$

Размерность самоподобия оказалась дробной. Образно можно сказать, что множество Кантора уже не отрезок, но еще не точка.

Чтобы найти размерность самоподобия салфетки Серпинского заметим, что одна салфетка состоит из 3 салфеток с размером стороны $1/2$. Тогда

$$d = -\frac{\ln 3}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850,$$

т. е. прокладка Серпинского занимает промежуточное положение между линией и фигурой.

В случае кривой Коха требуется 4 кривых длиной $1/3$, чтобы составить исходную кривую, таким образом, размерность самоподобия равна

$$d = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$

Все рассмотренные выше самоподобные объекты имели дробную размерность. Является ли это общим свойством всех самоподобных объектов? Нет! В 1890 г. Джузеппе Пеано построил непрерывную функцию, отображающую отрезок на квадрат. График этой функции — линия, целиком заполняющая квадрат, — называется кривой Пеано. Ее размерность — 2.

2.2. Размерность по Хаусдорфу—Безиковичу

Когда речь идет о фракталах, то часто используют размерность по Хаусдорфу—Безиковичу.

Для того чтобы измерить длину L_0 кривой, можно подсчитать число $N(\delta)$ прямолинейных отрезков длины δ , необходимых для того, чтобы покрыть ее. Тогда длина кривой —

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^0.$$

Можно определить площадь кривой, используя для покрытия не отрезки, а квадраты (треугольники, круги и т. п.) с линейным размером δ .

$$S = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1.$$

Подобным же образом можно определить и объем линии

$$V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^2.$$

Очевидно, что в пределе для обычной кривой длина будет конечной, а площадь и объем равны нулю. В то же время для фрактальной кривой, например, кривой Коха или Пеано, длина будет бесконечной. Длину, площадь, объем можно определить не только для кривой, но и для поверхности или тела.

Вычисляя длину, площадь, объем, т. е. меру M_d , мы покрывали множество точек различными геометрическими объектами (отрезками, кругами, кубами). Тогда $M_d = \sum \gamma(d)\delta^d$, где $\gamma(d)$ —

геометрический коэффициент, который зависит от выбора покрывающего объекта, d — размерность меры. Тогда

$$M_d = \sum \gamma(d) \delta^d = \gamma(d) N(\delta) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & \text{если } d > D, \\ \infty, & \text{если } d < D. \end{cases}$$

Величина D , при которой этот предел отличен от нуля и бесконечности, есть *размерность Хаусдорфа—Безиковича* или *хаусдорфова размерность*. Для фрактальных структур она, как правило, нецелочисленная. Одно из определений фракталов гласит:

фрактал — это объект, у которого размерность Хаусдорфа—Безиковича строго больше его топологической размерности.

Например, с точки зрения топологии прокладка Серпинского одномерна, так как может быть разделена на части удалением как максимум счетного числа точек (точнее, всего лишь двух).

§ 3. Фракталы в природе

Фракталы вокруг нас повсюду, и в очертаниях гор, и в извилистой линии морского берега. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции.

Хайнц-Отто Пайтген, Петер Х. Рихтер.
Красота фракталов

Множество физических объектов, как выяснилось в недавнем прошлом, имеют фракталоподобную структуру. Однако, в отличие от математических фракталов, большинство физических — так называемые нерегулярные фракталы. Принято различать регулярные и нерегулярные фракталы. Первые — плод воображения — на каждом этапе масштабирования в точности повторяют объ-

ект в целом. Нерегулярные фракталы — продукт природы или деятельности человека — на каждом уровне масштаба структура фрактала подобна, но не идентична объекту в целом. Понятно, что в отличие от математических, у естественных фракталов подобие сохраняется в широком, но конечном диапазоне масштабов.

Типичные природные фракталы — деревья, реки, облака, береговая линия.

Фракталами являются дендриты (от греч. дендрон — дерево). Дендритоподобные структуры возникают в различных областях физики, например, при кристаллизации металлов. Дендритоподобную структуру имеет обыкновенная снежинка.

К фрактальным структурам можно отнести также так называемые аэрогели — твердые тела, состоящие из связанных между собой микрочастиц, составляющих жесткий каркас, который занимает лишь малую часть общего объема. Особенность аэрогелей — огромный размер внутренних пор и различная их величина, переключается с одним из определений фрактала:

фрактал — это объект, имеющий в себе пустоты любого размера.

В человеческом организме — множество фрактальных образований в структуре дыхательной, кровеносной и нервной систем, губчатой структуре костей. Некоторые нейроны (нервные клетки) образованы фракталоподобной структурой. Если рассматривать эти нейроны через микроскоп с небольшим увеличением, то можно отчетливо увидеть отходящие от тела клетки асимметричные разветвленные отростки, называемые дендритами. При дальнейшем увеличении можно наблюдать новые уровни ответвления от ответвлений. Наиболее тщательно изучена фрактальная структура дыхательных путей, по которым воздух проникает в легкие. Фрактальная структура сердечных артерий и вен осуществляет кровоснабжение сердечной мышцы. Фрактальные ответвления или складки значительно увеличивают площадь поверхности, необходимой для всасывания (в тонком кишечнике), распределения или сбора различных веществ (в кровеносных сосудах, желчных протоках и бронхиолах) и обработки информации (в нервной системе).

С другими примерами фракталов мы познакомимся в следующих главах.

Хаотическое поведение динамических систем

Обычно под хаосом мы подразумеваем беспорядок, отсутствие какого-либо порядка, непредсказуемость в поведении. Казалось бы, хаос должен возникать из-за случайного изменения каких-либо величин. Однако это не так. В этой главе мы познакомимся с *динамическим хаосом* — хаотическим поведением динамических систем, которые описываются полностью детерминированными дифференциальными или разностными уравнениями. Не смотря на это, поведение систем является хаотическим. Для возникновения динамического хаоса необходимо, чтобы система была нелинейной. Кроме того, система должна проявлять существенную зависимость от начальных условий. Лоренц назвал это свойство *эффектом бабочки*: даже такое, казалось бы, ничтожное воздействие, как взмах крыльев бабочки, в отдельных случаях может привести к принципиальному изменению динамики хаотической системы. Поэтическое описание подобной ситуации можно найти в известном детском стихотворении.

Не было гвоздя —
Подкова пропала.

Не было подковы —
Лошадь захромала.

Лошадь захромала —
Командир убит.

Конница разбита —
Армия бежит.

Враг вступает в город,
Пленных не щадя,
Оттого, что в кузнице
Не было гвоздя.

На первый взгляд кажется невероятным, что такое ничтожное событие как потеря гвоздя, может привести к падению города, однако, подумав, можно вспомнить ряд случаев из истории или собственной жизни, когда ситуация складывалась подобным образом.

Еще одной характерной особенностью хаотических систем является наличие *странных аттракторов* — областей притяжения с фрактальной структурой.

§ 1. Дискретный аналог уравнения Ферхюльста

Не только в научных исследованиях, но и в повседневном мире экономики и политики всем нам будет лучше, если больше людей поймет, что простые нелинейные системы не обязательно проявляют простые динамические свойства.

Роберт Мэй¹⁾

Рассмотрим еще одну модель динамики биологической популяции. Пусть у некоторого вида поколения не взаимодействуют между собой. Обычно такая ситуация встречается у насекомых. Некоторый вид бабочек откладывает яйца и погибает. Из яиц потомство появляется только на следующее лето (пройдя, естественно, соответствующие ступени превращений). Таким образом, поколения бабочек не взаимодействуют, хотя численность одного поколения связана с численностью предыдущего поколения. Мы имеем систему с дискретным временем. Динамику такой системы

¹⁾ Nature. 1976. Vol. 261. June 10.

естественно описывать не дифференциальным, а разностным уравнением

$$x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n). \quad (7.1)$$

Данное уравнение является дискретным аналогом логистического уравнения (2.3). Для того чтобы численность популяций никогда не была отрицательной, параметр r должен принимать значения от 0 до 1.

В зависимости от величины параметра r система может демонстрировать различное поведение:

1. Популяция с течением времени может вымереть: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
2. Численность популяции может стабилизироваться на некоторой величине: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_{\text{stab}}$.
3. Численность может испытывать периодические колебания, повторяясь через некоторое число шагов: $x_{n+m} = x_n$. При этом $m = p^k$, т. е. в системе имеется m стационарных точек, система последовательно переходит из одной стационарной точки в другую. В этом случае говорят о p^k -периодическом движении.
4. Численность популяции может меняться хаотически.

Все возможные варианты поведения системы представлены на рис. 7.1. Особый интерес представляет область хаотического поведения системы. Эта область имеет фрактальную структуру. Увеличив любой из фрагментов этой области, мы увидим, что его структура подобна всей области.

§ 2. Универсальность Фейгенбаума

Подробный анализ поведения уравнения (7.1) провел Митчел Фейгенбаум в 1975 г. Он открыл ряд универсальных закономерностей в поведении систем вида

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

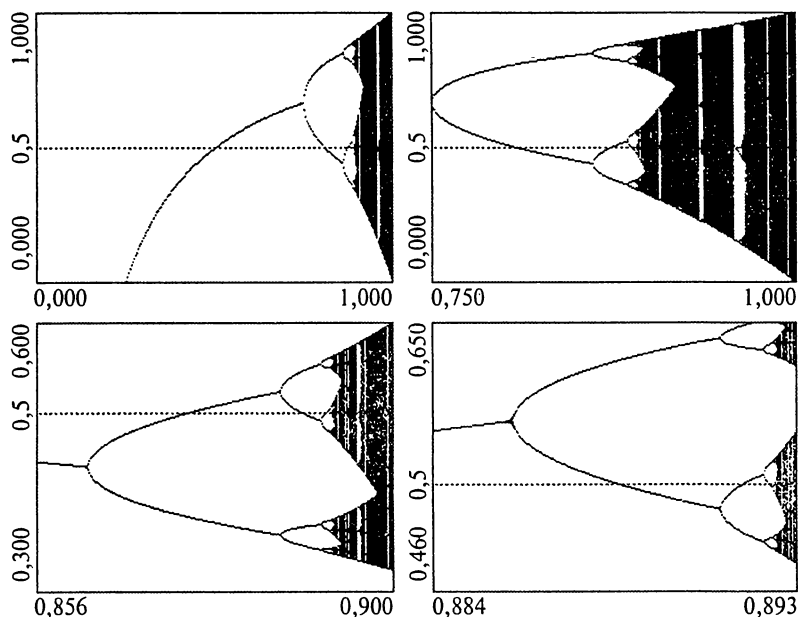


Рис. 7.1. Логистическое отображение

Если функция f имеет единственный квадратичный максимум, то система переходит к хаосу через последовательность удвоенных периода.

Если обозначить через r_n значение параметра r , при котором происходит n -е удвоение периода, то

$$r_\infty - r_n \propto \delta^{-n}.$$

Если обозначить

$$\delta_n = \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}},$$

то постоянная Фейгенбаума δ может быть вычислена как

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4,6692016\dots$$

Величина $r_\infty = 0,892486417967\dots$ определяет границу области хаоса.

Расстояние d_n от точки $x = 1/2$ до ближайшей к ней точки на n -м цикле подчиняется следующей закономерности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha,$$

где $\alpha = 2,502927875\dots$ и также является универсальной константой.

§ 3. Другие отображения

Можно построить разнообразные одномерные и двумерные отображения, обладающие хаотическими свойствами. Одним из примеров может служить двумерный аналог уравнения Фейгенбаума

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n^2, \\ y_{n+1} = a - x_n. \end{cases} \quad (7.2)$$

При $a = -0,4224$ эта система уравнений проявляет бесконечно сложное поведение. Обобщением этой системы является сжимающее отображение Фейгенбаума с $|b| < 1$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n^2, \\ y_{n+1} = a + bx_n. \end{cases} \quad (7.3)$$

Еще один пример двумерного отображения с хаотическими свойствами — консервативное отображение Хенона (Энона) (Hénon, 1976):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (7.4)$$

Хаотическое поведение можно наблюдать при значениях параметров $a = 0,95$, $a = 3,02$.

В случае диссипативного отображения Хенона (рис. 7.2).

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (7.5)$$

хаотическое поведение наблюдается при $b = 0,3$, $a = 1,4$.

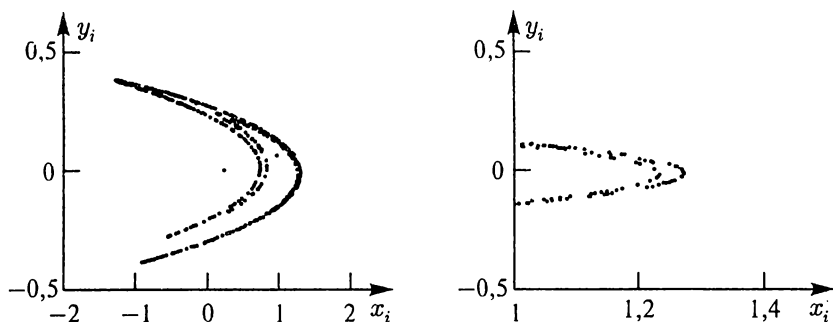


Рис. 7.2. Отображение Хенона

Динамика популяции насекомых, численность которых ограничена эпидемиями, описывается отображением с функцией

$$f(x) = x \exp \{r(1 - x)\}. \quad (7.6)$$

Это отображение так же демонстрирует хаотическое поведение.

Еще одно уравнение, которое используется для описания динамики популяции насекомых,

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 + x_n)^{-\beta}. \quad (7.7)$$

Таким образом, хаотическое поведение не является чем-то исключительным, а возникает достаточно часто в разнообразных моделях.

§ 4. Система уравнений Лоренца

Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии привести к образованию торнадо в Техасе?

Эдвард Лоренц

В 1963 г. Эдвард Лоренц занимался компьютерным моделированием метеосистем. В частности, он рассматривал конвекцию в подогреваемом снизу слое. Взяв за основу уравнения Навье—Стокса, он получил следующую систему уравнений

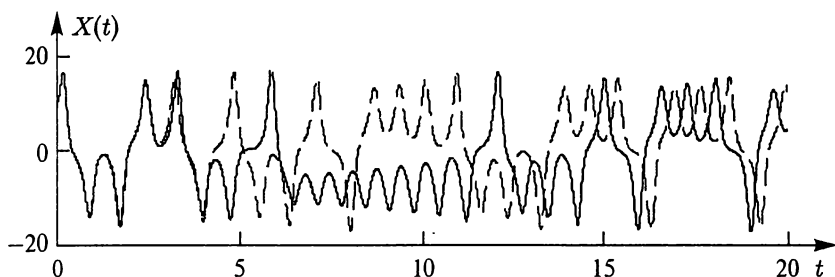
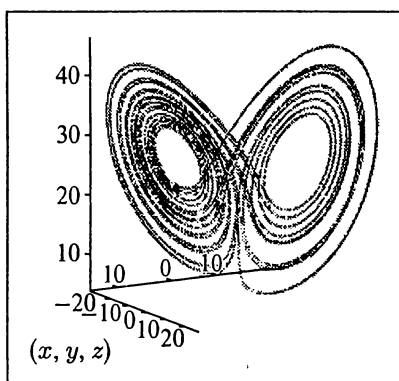


Рис. 7.3. Аттрактор Лоренца (вверху) и зависимость $X(t)$ для двух близких начальных значений (внизу)

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - bZ. \end{cases} \quad (7.8)$$

При значениях параметров $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ система начинает вести себя хаотически. Малейшие изменения в начальных условиях приводят к кардинальному изменению поведения системы. Область притяжения фазовых траекторий имеет фрактальный характер и называется *аттрактором Лоренца* (см. рис. 7.3). Верхний рисунок показывает аттрактор Лоренца, нижний — за-

висимость величины X от времени для двух близких начальных значений. Первоначально совпадающие кривые за короткое время разбегаются. Двум близким начальным состояниям соответствуют совершенно разные варианты эволюции системы.

Поскольку, система уравнений (7.8) описывает, в частности, динамику атмосферы, можно сделать вывод о невозможности точного долгосрочного предсказания погоды, так как любые замеры параметров атмосферы проводятся с конечной точностью.

§ 5. Аттрактор Ресслера

В 1976 г. Ресслер предложил следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику химических реакций с перемешиванием,

$$\begin{cases} \dot{X} = -(Y + Z), \\ \dot{Y} = X + \frac{1}{5}Y, \\ \dot{Z} = \frac{1}{5} + Z(X - \mu). \end{cases} \quad (7.9)$$

В химии эта модель стала базовой для описания хаотических процессов.

Пример фазового портрета системы Ресслера и зависимость $X(t)$ приведены на рис. 7.4.

§ 6. Неавтономная система

Рассмотрим движение математического маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания по закону $x = x_m \cos \omega_p t$. Для маятника это равносильно тому, что сила тяжести меняется по гармоническому закону

$$g(t) = g_0 - a(t) = g_0 + x_m \omega_p^2 \cos \omega_p t.$$

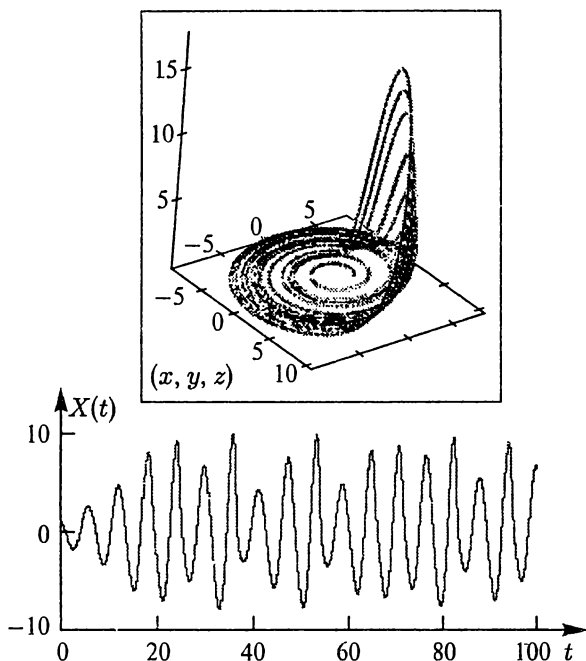


Рис. 7.4. Атрактор Ресслера (вверху) и зависимость $X(t)$ (внизу)

При наличии затухания движение маятника описывается уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g(t)}{l} \sin \varphi = 0.$$

Если обозначить глубину модуляции параметра

$$x_m \frac{\omega_p^2}{g_0} = \frac{x_m}{l} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 = \mu,$$

то

$$\frac{g(t)}{l} = \frac{g_0}{l} \left(1 + \frac{x_m \omega_p^2}{g_0} \cos \omega_p t \right) = \omega_0^2 (1 + \mu \cos \omega_p t),$$

и уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 (1 + \mu \cos \omega_p t) \sin \varphi = 0.$$

Полученное уравнение движения зависит явно от времени, т. е. система не является автономной. В случае малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$) заменой переменных

$$\varphi = \frac{u}{l} \exp \{-\beta t\}$$

уравнение приводится к виду

$$\ddot{u} + \Phi(t)u = 0. \quad (7.10)$$

Уравнение (7.10) — дифференциальное уравнение 2-го порядка с периодическим коэффициентом $\Phi(t)$ — называется *уравнением Хилла*. В нашем частном случае уравнение Хилла переходит в *уравнение Матье*

$$\ddot{u} + \omega_0^2(1 + \mu \cos \omega_p t)u = 0. \quad (7.11)$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается (*теорема Флоке*), что решение уравнения Хилла, а, следовательно, и уравнения Матье, имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda t} \chi(t) + C_2 e^{-\lambda t} \chi(-t),$$

где λ — ляпуновский показатель, $\chi(t)$ — ограниченная периодическая функция с периодом, равным периоду изменения параметра. В случае уравнения Матье функции $\chi(t)$ — функции Матье. Это специальные функции, получить которые в виде ряда можно, если искать решение уравнения Матье в виде ряда Фурье. Функции Матье протабулированы и их свойства известны. Ляпуновский показатель λ , вообще говоря, комплексный. Если $\text{Re } \lambda > 0$, то одно из слагаемых будет возрастать — в системе возникнут нарастающие колебания. Анализ устойчивости решения уравнения Матье можно провести, используя, например, методы теории возмущений. Результаты анализа показывают, что резонанс наступает не только при точном выполнении равенства $\omega_p = 2\omega_0/n$, где n — целое число, но и в некоторой области частот.

Результаты расчета зон устойчивости представлены на рис. 7.5. Заштрихованные зоны соответствуют областям параметрического резонанса. При увеличении глубины модуляции ширина зон

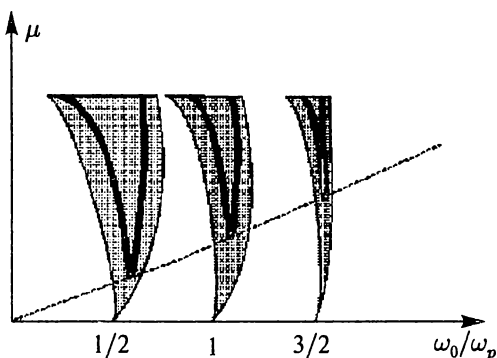


Рис. 7.5. Зоны неустойчивого движения при параметрических колебаниях

увеличивается. Уменьшение частоты изменения параметра, т. е. более редкое введение энергии в систему, приводит к уменьшению ширины зон. Ширина зон пропорциональна μn , где n — номер зоны. Учет затухания приводит к тому, что резонанс становится возможным не при сколь угодно малой глубине изменения параметра, а при конечных значениях. При резонансе амплитуда колебаний увеличивается, колебания перестают быть малыми, а значит, изохронными, система выходит из резонанса, колебания маятника затухают, их амплитуда уменьшается, при этом происходит и уменьшение периода, и все повторяется сначала. Если затухание в системе мало, то резонанс может привести даже к тому, что маятник из колебательного режима движений перейдет во вращательный.

В случае нашей неавтономной системы фазовое пространство будет трехмерным. Трехмерное фазовое пространство имеют также системы Лоренца и Ресслера. Существует эффективный метод понижения размерности фазового пространства, предложенный Пуанкаре. Выберем в фазовом пространстве некоторую поверхность, которая пересекает все или почти все фазовые траектории. Такая поверхность называется *секущей поверхностью* или *сечением Пуанкаре*. Точки пересечения сечения Пуанкаре и фазовых траекторий будут определяться разностным уравнением

$$x_{n+1} = S(x_n),$$

которое называется *отображением Пуанкаре*. Для неавтономной системы можно использовать другую интерпретацию. На плоскости (x, \dot{x}) будем отмечать точки в моменты времени, кратные периоду внешней силы или изменения параметра ($t = nT$). Если система совершает периодическое движение с периодом T , то отображение будет состоять из единственной точки, если период равен nT , то отображение будет состоять из n точек. В случае хаотического движения точки целиком заполнят некоторую область.

ЧАСТЬ II

СТОХАСТИЧЕСКИЕ И ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Теория перколяции

§ 1. Введение

Исторически теория перколяции восходит к работам Флори (1941) и Стокмайера (1943), которые рассматривали процесс образования гелей при полимеризации. Однако, обычно начало теории перколяции связывают с публикацией в 1957 г. работы Бродбента и Хаммерсли. Авторы ввели в обиход название «теория перколяции» и рассмотрели процесс с математической точки зрения.

В настоящее время перколяционные процессы рассматриваются математиками, физиками, химиками, программистами, инженерами. Оказалось, что перколяция является удобной моделью для описания широкого класса явлений, которые принято называть критическими. С другой стороны, задача оказалась весьма интересной и с точки зрения чистой математики.

Большинство результатов теории перколяции получено в результате компьютерного моделирования. При этом приходится проводить многие тысячи компьютерных испытаний на больших объектах, что потребовало разработки эффективных алгоритмов.

Выяснилось, что теория перколяции имеет точки соприкосновения с рядом новых и перспективных направлений науки, например, перколяционные процессы могут приводить к самоорганизации и образованию структур, объекты, которые образуются при перколяции, являются фракталами.

Несмотря на то, что в теории перколяции получен ряд строгих результатов, а в ее применении достигнуты значительные успехи, она находится еще в процессе становления, многое еще предстоит понять, доказать, применить.

Что же такое перколяция? Поскольку перколяцией занимаются специалисты из разных областей знаний, то для описания перколяции используются два подхода. С одной стороны, математики применяют формальный подход, основанный на представлениях теории вероятностей и теории графов, строгих доказательствах и формальных обозначениях. С другой стороны, естественники предпочитают более простой и наглядный подход, часто заменяя строгие доказательства ссылками на аналогию, интуицию и здравый смысл. Кажется разумным использовать для начального знакомства с теорией именно второй подход.

Рассмотрим квадратную сетку 3×3 (рис. 8.1). Закрасим часть квадратов черным цветом. В нашем случае их 3. Доля закрашенных квадратов составляет

$$p = \frac{N_{\text{черн.}}}{N} = \frac{1}{3}.$$

Каким образом мы выбираем квадратики для закрашивания? Во-первых, можно выбирать квадратики случайно и независимо; во-вторых, можно ввести какие-либо правила. В первом случае говорят о случайной перколяции (математики называют ее еще перколяцией Бернулли), во втором — о коррелированной.

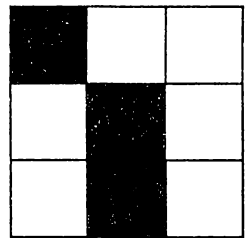


Рис. 8.1. Перколяция на квадратной решетке размером 3×3 клетки

Один из основных вопросов, на которые пытается ответить теория перколяции, — при какой доле p_c закрашенных квадратов возникает цепочка черных квадратов, соединяющая верхнюю и нижнюю стороны нашей сетки? Легко сообразить, что для сетки конечного размера такие цепочки могут возникать при разных концентрациях (рис. 8.2). Однако, если размер сетки устремить к бесконечности, то критическая концентрация станет вполне определенной. Это строго доказано. Такую критическую концентрацию называют *порог перколяции*.

Может возникнуть резонный вопрос: а какой, собственно, смысл в этих задачах? Давайте представим, что черные квадраты — это проводник, а белые — изолятор. До тех пор, пока не возникнет цепочка проводящих участков, связывающая верх

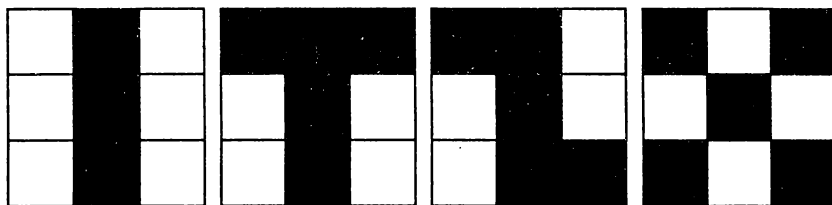


Рис. 8.2. Различные варианты заполнения решетки

и низ образца, образец будет изолятором. При возникновении цепочки его свойства изменятся скачком, произойдет фазовый переход, образец станет проводником.

Если рассматривать черные квадратики в качестве молекул, то образование цепочки молекул, пронизывающей всю систему, соответствует образованию геля. Если полагать, что черные квадраты — это микротрещины, то образование цепочки таких трещин приведет к разрушению, раскалыванию образца. Этот список легко можно продолжить.

Итак, польза теории перколяции, в частности, в том, что она позволяет описать процессы самой разной природы, когда при плавном изменении одного из параметров системы (концентрации чего-то) свойства системы меняются скачком.

Теория перколяции привлекает к себе внимание специалистов по ряду причин:

- легкие и элегантные формулировки задач теории протекания сочетаются с трудностью их решения;
- их решение требует объединения новых идей из геометрии, анализа и дискретной математики;
- физическая интуиция бывает весьма плодотворной при решении этих задач;
- техника, развитая для теории перколяции, имеет многочисленные приложения в других задачах о случайных процессах;
- теория перколяции дает ключ к пониманию иных физических процессов.

§ 2. Немного терминологии

Слово «перколяция» (percolation — англ.) означает протекание. В русской литературе можно встретить и теорию перколяции, и теорию протекания, и даже теорию просачивания. Название возникло в связи с тем, что ряд первых работ в этом направлении был посвящен процессам просачивания (протекания) жидкостей или газов через пористую среду. До сих пор это направление занимает существенную часть в работах по теории перколяции.

Пожалуй, наиболее распространенными задачами теории перколяции являются *решеточные задачи*: задача узлов и задача связей.

Решеточные модели в первую очередь представляют интерес с теоретической точки зрения, именно для них доказан ряд строгих утверждений и соотношений. К настоящему времени процессы протекания на решетках изучены и поняты достаточно хорошо. С другой стороны, эти задачи имеют и практическую значимость: даже такой простой модели оказывается достаточно, чтобы описать, например, фазовый переход парамагнетик-ферромагнетик, процесс распространения эпидемии или лесного пожара.

В химии теория перколяции применяется для описания процессов полимеризации или связывания маленьких молекул в макромолекулы (гели). В биологии распространение эпидемий можно описать с помощью модели связей. Эта же модель описывает пожар в лесу, если вероятность передачи инфекции от больного животного здоровому заменить на вероятность распространения огня от горящего дерева к соседнему. Кроме того, теория находит широкое применение для описания различных неупорядоченных систем в химии и физике: пористые и аморфные материалы, включая и тонкие пленки; неупорядоченные ионные проводники; галактические структуры.

Рассмотрим бесконечную квадратную сетку (рис. 8.3). Физик называет такую конструкцию периоди-

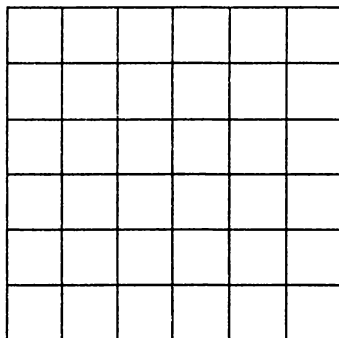


Рис. 8.3. Квадратная решетка

ческой квадратной решеткой, а математик — бесконечным регулярным графом. Назовем точки пересечения линий *узлами* (в математических работах их обычно называют вершинами, в старых статьях можно встретить термин атом). Сами линии будем называть *связями* (математики используют термин ребро).

В задаче связей ищут ответ на вопрос: какую долю связей нужно удалить (перерезать), чтобы сетка распалась на две части? В задаче узлов блокируют узлы (удаляют узел, перерезают все входящие в узел связи) и ищут, при какой доле заблокированных узлов сетка распадется. Понятно, что квадратная сетка является только одной из возможных моделей. Можно рассматривать перколяцию на треугольной, шестиугольной сетках, деревьях, трехмерных решетках, например, кубической, в пространстве с размерностью больше 3. Сетка не обязательно должна быть регулярной. Рассматриваются процессы и на случайных решетках.

Цепочка связанных объектов, например, черных квадратов, называется в теории перколяции *кластер* (cluster — англ. — гроздь). Кластер, соединяющий две противоположные стороны системы, называется *перколяционным, бесконечным, стягивающим* или *соединяющим*. Изучение свойств соединяющего кластера — еще одна из задач теории перколяции. Ниже порога перколяции имеются только кластеры конечного размера.

Кроме определения порога перколяции вычисляют следующие характеристики:

$\langle N_s \rangle$ — среднее число кластеров размера s ;

N — полное число ячеек;

$n_s(p) = \frac{\langle N_s \rangle}{N}$ — распределение кластеров по размерам;

$\sum_s s n_s(p)$ — полное число занятых ячеек;

$s n_s(p)$ — количество занятых ячеек, принадлежащих кластерам размера s ;

$w_s = \frac{s n_s(p)}{\sum_s s n_s(p)}$ — вероятность того, что случайно выбранный

занятый узел принадлежит кластеру размера s ;

$$S = \sum_s s w_s = \frac{\sum_s s^2 n_s(p)}{\sum_s s n_s(p)} \text{ — средний размер кластера;}$$

$P_\infty(p) = \frac{N_\infty}{N_{\text{занятых}}}$ — вероятность того, что случайным образом выбранный занятый узел принадлежит стягивающему кластеру;

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \mathbf{r}_i \text{ — радиус-вектор центра масс кластера;}$$

$$R_s^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\mathbf{r}_i - \langle \mathbf{r} \rangle)^2 \text{ — радиус циркуляции;}$$

$$\xi(p)^2 = \frac{2 \sum_s \langle R_s^2 \rangle s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \text{ — длина корреляции.}$$

Исследуют также следующие вопросы:

- структура субкритической и суперкритической фаз;
- что происходит вблизи порога перколяции;
- какова структура перколяционного кластера;
- каковы значения и свойства различных макроскопических величин, как, например, средний размер кластера;
- что происходит при изменении структуры решетки и размерности пространства.

Остов кластера (в русскоязычной литературе часто неправильно переводится как скелет) — токопроводящая часть кластера. *Мертвые концы* — части кластера, соединенные с остовом посредством одного узла (связи). Мертвые концы составляют большую часть кластера, однако, не участвуют в проводимости. *Красные связи* — одиночные связи, при разрушении которых перколяционный кластер перестает проводить ток. *Скелет кластера* — объединение всех кратчайших путей от данного узла до узлов на заданном расстоянии. *Эластичный остов* — объединение всех кратчайших путей

между двумя данными узлами. *Оболочка* или *внешний периметр* состоит из тех узлов кластера, которые соприкасаются с пустыми узлами и соединены с бесконечностью посредством пустых узлов. *Полный периметр* включает также пустоты внутри кластера. Все эти подструктуры описываются различными фрактальными размерностями, для ряда из них на сегодняшний день значения получены только путем компьютерного моделирования.

В *континуальной перколяции* рассматриваются задачи жестких и пересекающихся сфер или эллипсоидов, положения которых в пространстве не ограничены жесткими рамками периодической решетки. Пусть, например, на проводящей плоскости вырезаны круглые дыры, центры которых распределены по плоскости хаотически. При некоторой критической концентрации дыр проводящая плоскость станет изолятором. Модели такого рода позволяют описать, например, прыжковую проводимость в полупроводниках.

§ 3. Критические показатели и масштабная инвариантность

В отличие от теории температурных фазовых переходов, где переход между двумя фазами происходит при критической температуре, перколяционный переход является геометрическим фазовым переходом. Порог перколяции или критическая концентрация разделяет две фазы: в одной фазе существуют конечные кластеры, в другой существует один бесконечный кластер. Рассмотрим, например, магнитный фазовый переход. При низких температурах некоторые материалы имеют ненулевую спонтанную намагниченность. При увеличении температуры спонтанная намагниченность непрерывно уменьшается и при критической температуре исчезает. В перколяции концентрация занятых узлов играет ту же роль, что и температура в температурных фазовых переходах. Вероятность, что узел принадлежит бесконечному кластеру, аналогична параметру порядка в теории температурных фазовых переходов. Многие важные характеристики кластера (длина корреляции, среднее число узлов) вблизи перехода описываются показательной функцией

с различными критическими показателями.

$$P_{\infty}(p) \propto |p - p_c|^{\beta},$$

$$\xi(p) \propto (p_c - p)^{\nu},$$

$$S(p) \propto |p - p_c|^{-\gamma}.$$

Эти показатели являются универсальными, не зависящими от вида решетки, типа перколяции, а только от размерности пространства задачи. Критические показатели связаны между собой соотношением

$$2\beta + \gamma = \nu d,$$

где d — размерность пространства. Это соотношение следует из *масштабной инвариантности* или *скейлинга* — неизменности уравнений при изменении всех расстояний в одинаковое число раз.

§ 4. Алгоритм Хошена—Копельмана

Хотя в теории перколяции получен ряд строгих математических результатов, основной прогресс достигнут на пути использования компьютерных методов (изучение процессов путем моделирования методом Монте-Карло). Разработан ряд высокоэффективных алгоритмов, которые, в частности, позволили определить порог перколяции для множества решеток с высокой точностью.

Одним из основных алгоритмов является алгоритм многократной маркировки кластеров Хошена—Копельмана, предложенный в 1976 г. Этот алгоритм особенно полезен, когда исследуется распределение кластеров по размерам. Работа по разработке новых эффективных алгоритмов интенсивно продолжается. Особый интерес представляют алгоритмы для обработки подструктур перколяционного кластера и алгоритмы, основанные на параллельных вычислениях.

Важной особенностью алгоритма Хошена—Копельмана является его однопроходность. За один проход алгоритм позволяет выяснить, к какому кластеру относится тот или иной узел решетки. Идея алгоритма заключается в том, что всем занятым узлам решетки приписываются различные кластерные метки.

Рассмотри работу алгоритма на примере задачи узлов на квадратной решетке. Следует иметь в виду, что существует множество вариантов алгоритма, мы рассмотрим лишь простейший. Моделировать решетку будет массив a размером $L \times L$. Пусть узлы решетки заполнены с вероятностью p . Будем генерировать случайные числа, равномерно распределенными на интервале $[0, 1]$. Если сгенерированное число меньше или равно p , очередному элементу массива a присвоим значение 1, иначе — 0. Поскольку компьютерный эксперимент придется проводить многократно, эту последовательность случайных чисел нужно зафиксировать. Хранить последовательность в виде массива было бы очень не экономично, но достаточно воспользоваться тем свойством генераторов псевдослучайных чисел, что каждый раз они генерируют одну и ту же последовательность чисел.

Для того чтобы работа со всеми элементами массива была единообразной, удобно добавить к нему одну строку с номером 0 и один столбец с номером 0, заполненные нулями. Кроме того, создадим массив кластерных меток cl . Первоначально значения элементов этого массива совпадают с их номерами. В процессе проверки эти номера могут изменяться. Если значение элемента массива стало меньше его номера, то такую кластерную метку называют неправильной. Правильное значение кластерной метки — значение элемента массива.

Начнем просматривать последовательно все элементы массива, начиная с элемента $a[1, 1]$. Нулевой столбец будем пропускать. Возможны следующие ситуации.

- Если значение текущего элемента массива равно 0, то переходим к следующему элементу.
- Если текущее значение равно 1, то осуществляем следующую проверку:
 - Если сосед слева $a[i, j - 1]$ и сосед сверху $a[i - 1, j]$ имеют значения 0, то в качестве рабочей гипотезы принимаем, что данный элемент входит в новый кластер, присваиваем текущему элементу номер очередной кластерной метки. Конечно, вполне может оказаться, что новый, как нам кажется, кластер является просто веткой

какого-то другого кластера. Выяснить это мы сможем только просмотрев весь массив целиком.

- Если сосед сверху имеет значение 0, а сосед слева не равен нулю, то текущая ячейка и ее сосед слева принадлежат одному и тому же кластеру. Текущему элементу присваиваем номер кластерной метки соседа слева.
- Если сосед сверху имеет значение, отличное от нуля, а сосед слева — нулевое значение, то текущая ячейка и ее сосед сверху принадлежат одному и тому же кластеру. Однако, у соседа сверху кластерная метка может быть неправильной, так как в результате последующих проверок могло выясниться, что кластер, к которому принадлежит эта ячейка, слился с другим кластером. Поэтому текущему элементу следует присвоить номер *правильной кластерной метки* соседа сверху.
- Если и сосед сверху и сосед слева имеют ненулевые значения, то все три ячейки принадлежат одному кластеру. Текущему элементу присваиваем наименьший из номеров правильных кластерных меток соседа сверху и соседа слева. Корректируем массив кластерных меток. Для этого в элемент массива cl , соответствующий большей из кластерных меток заносим номер правильной кластерной метки.

Полученное при моделировании значение порога перколяции для решетки конечного размера должно быть экстраполировано на бесконечность. Для этого можно воспользоваться скейлинговыми соотношениями.

Если под величиной $\langle p_c(L) \rangle$ понимать среднее значение концентрации, при которой перколяция впервые возникает на решетке с линейным размером L , то справедливо соотношение

$$|\langle p_c(L) \rangle - p_c(\infty)| \propto L^{-1/\nu}. \quad (8.1)$$

Если критический показатель ν неизвестен или для независимой проверки можно воспользоваться соотношением

$$|\langle p_c(L) \rangle - p_c(\infty)| \propto \Delta(L), \quad (8.2)$$

где $\Delta(L)$ — дисперсия, определяемая выражением

$$\Delta(L) = \sqrt{|\langle p_c(L)^2 \rangle - \langle p_c(L) \rangle^2|}. \quad (8.3)$$

Кроме того, можно построить зависимость вероятности возникновения протекания $P(p)$ в зависимости от концентрации. Точка, соответствующая вероятности 50 %, является порогом перколяции.

Моделирование роста дендритов

Очень часто структуры, возникающие в природе при различных процессах, имеют форму дендритов. Например, дендриты образуются при росте кристаллов в определенных условиях, ветвистую, т. е. дендритную, структуру имеет молния, трещины и разломы часто так же напоминают дендриты. Существует несколько моделей, позволяющих изучать образование дендритов в различных процессах.

§ 1. Ограниченная диффузией агрегация

Одной из моделей, описывающих процесс роста дендритов, является *ограниченная диффузией агрегация* (ОДА). В этой модели рассматривается случайное движение (диффузия) молекул, которые могут слипаться при встрече, образуя кластер. В двумерном случае можно рассмотреть две ситуации. В первом случае частицы начинают движение с окружности достаточно большого радиуса, в центре которой имеется неподвижная частица – затравка. Частица движется случайным образом, пока не достигнет окружности или затравки. Достигнув затравки, частица присоединяется к ней, образуя кластер. После чего из случайно выбранной точки окружности стартует новая частица. Процесс повторяется вновь и вновь, пока кластер не станет достаточно большим. Получившийся кластер имеет форму дендрита с фрактальной размерностью 1,71. Форма полученного в результате моделирования дендрита близка к той, которая возникает при реальных процессах кристаллизации (см. рис. 9.1).



Рис. 9.1. Реальный кристалл, имеющий форму дендрита (слева). Дендрит, полученный в результате компьютерного моделирования по методу ОДА (справа)

Можно рассмотреть другую ситуацию. Пусть имеется прямоугольная область. Молекулы начинают диффузию из случайно выбранной точки на верхней границе области. При достижении боковых сторон области они упруго отражаются, при достижении нижней границы или кластера они прилипают (рис. 9.2).

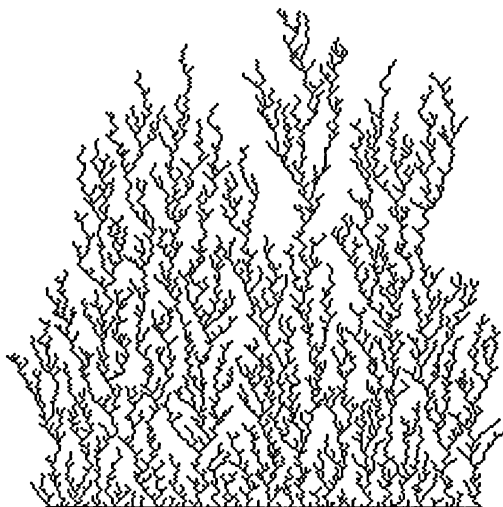


Рис. 9.2. «Фрактальные водоросли», образовавшийся в результате ОДА

§ 2. Электрический пробой диэлектрика

Можно смоделировать образование молнии с помощью следующего алгоритма.

Пусть имеется квадратная решетка, каждому узлу которой приписано случайное число r ($0 \leq r \leq 1$). Эти числа характеризуют случайную структуру диэлектрика, т. е. коэффициент электрического пробоя. Поместим в центр решетки заряд и окружим его окружностью радиуса R . Будем полагать, что потенциал электрического поля (φ) в центре решетки равен нулю, а на окружности равен 1. Вычисляем по уравнению Пуассона, используя, например, метод релаксации, значения потенциала электрического поля в узлах решетки, расположенных внутри окружности.

Определяем для каждого ближайшего к заряду узла градиент потенциала (u) и вычисляем величину $s = r u^a$, где $a < 1$ — некоторый параметр. Электрический пробой происходит в направлении того узла, для которого величина s максимальна. Приписываем этому узлу потенциал 0 и пересчитываем потенциал в остальных узлах. Процесс продолжается до тех пор, пока заряд не достигнет окружности (рис. 9.3).

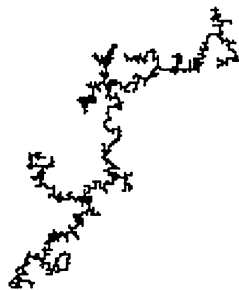


Рис. 9.3. Моделирование пробоя диэлектрика

Можно смоделировать электрический пробой и в однородной среде. В этом случае узлам решетки не нужно приписывать случайные числа. Проверяем все узлы, ближайшие к заряду, и находим узел с наибольшим значением градиента потенциала u_{\max} .

Полагаем, что заряд распространяется в направлении тех узлов, для которых $u/u_{\max} > p$, где $p < 1$ — некоторый параметр. Узор, образованный при таком процессе, называется *фрактальным ковром Лапласа*.

Клеточные автоматы

В этой главе мы познакомимся еще с одним классом моделей — клеточными автоматами. Впервые клеточные автоматы были предложены в 1948 г. фон Нейманом и Уламом в качестве модели биологического воспроизводства. Особенностью клеточных автоматов является то, что в этих моделях пространство и время дискретны. Пространство представляет из себя регулярную решетку, клетки (ячейки) которой могут находиться в конечном числе состояний. Состояние клетки определяется ее окружением. Состояния всех клеток меняются одновременно.

§ 1. Игра «Жизнь»

В 1970 г. Джон Х. Конвей (Конуэй) предложил клеточный автомат, который на сегодняшний день стал, вероятно, самым известным. Клеточный автомат получил название игра «Жизнь», так как возникающие ситуации очень похожи на реальные процессы, происходящие при зарождении, развитии и гибели колонии живых организмов.

Клеточный автомат задается следующими правилами. Клетки на квадратной доске могут находиться в двух состояниях. «Живая клетка» (значение 1) выживает на следующем временном шаге, если имеет только 2 или 3 живых соседа. Если соседей меньше двух, то клетка умирает из-за обособленности, а если больше трех, то из-за скученности (перенаселения). «Мертвая клетка» (значение 0) оживает на следующем временном шаге только в том случае, если имеет 3 соседа. Каждая клетка имеет восемь соседей: клетки,

которые имеют с ней общие стороны или вершины. Изменение состояния всех клеток происходит одновременно, т. е. данная система — система с дискретным временем.

В игре «Жизнь» встречаются самые разнообразные конфигурации «живых клеток»:

- конфигурации, которые вымирают за конечное число шагов;
- устойчивые или стационарные конфигурации, т. е. конфигурации, которые в точности воспроизводятся на каждом временном шаге;
- периодически меняющиеся конфигурации, т. е. конфигурации, которые претерпев ряд изменений, через несколько шагов возвращаются в исходное состояние, после чего процесс повторяется вновь;
- движущиеся конфигурации, например «глайдер»;
- «генераторы» — конфигурации, которые порождают новые конфигурации.

Примеры некоторых интересных начальных конфигураций приведены на рис. 10.1.

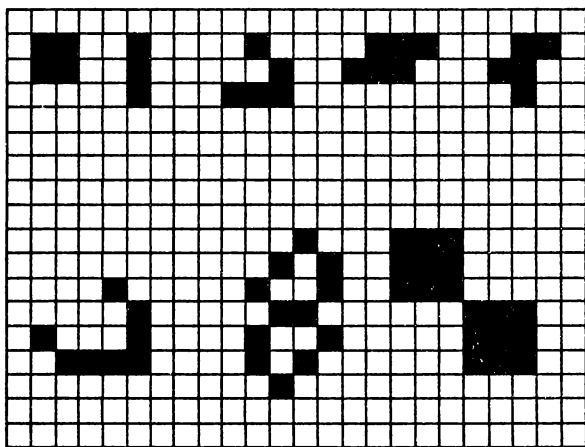


Рис. 10.1. Некоторые интересные начальные конфигурации. Среди них есть стационарные, пульсирующие, движущиеся

§ 2. Модель Винера—Розенблюта

В 1946 г. Винер и Розенблют предложили простую модель, которая позволяет анализировать разнообразные режимы распространения возбуждения в однородной нейронной сети или сердечной мышце. В соответствии с этой моделью, возбудимая среда состоит из элементов, которые имеют три возможных состояния: *состояние покоя*, *состояние возбуждения* и *рефрактерное состояние*. Первоначально элементы находятся в состоянии покоя. Под действием внешнего возбуждения, интенсивности не ниже пороговой, элемент переходит в состояние возбуждения и остается в нем в течение определенного времени τ_e . Состояние возбуждения сменяется рефрактерным состоянием. Никакое внешнее воздействие не может перевести элемент из рефрактерного состояния в состояние возбуждения. По прошествии определенного времени τ_r элемент возвращается из рефрактерного состояния в состояние покоя и вновь может быть возбужден. В рамках такой модели удалось описать возникновение в активной среде спиральных волн и ряд других интересных эффектов.

Пусть двумерная сетка состоит из элементов, пронумерованных парой индексов — i и j . Состояние элементов определяется двумя переменными: Φ_{ij}^n — фазой и u_{ij}^n — концентрацией активатора. Здесь верхний индекс n означает номер временного шага. Переходы между состояниями осуществляются в соответствии со следующими правилами:

$$\Phi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} \Phi_{ij}^n + 1, & \text{если } 0 < \Phi_{ij}^n < \tau_e + \tau_r, \\ 0, & \text{если } \Phi_{ij}^n = \tau_e + \tau_r, \\ 0, & \text{если } \Phi_{ij}^n = 0 \text{ и } u_{ij}^{n+1} < h, \\ 1, & \text{если } \Phi_{ij}^n = 0 \text{ и } u_{ij}^{n+1} \geq h. \end{cases} \quad (10.1)$$

Нулевая фаза соответствует состоянию покоя. Если фаза $0 < \Phi_{ij}^n \leq \tau_e$, то элемент находится в возбужденном состоянии. При фазе $\tau_e < \Phi_{ij}^n \leq \tau_e + \tau_r$ элемент находится в рефрактерном состоянии. В соответствии с этими правилами элемент переходит из состояния покоя в состояние возбуждения, если концентрация активатора превышает пороговое значение h . В противном случае элемент

претерпевает последовательность переходов, каждый из которых увеличивает его фазу на единицу. Когда фаза становится равной $\tau_e + \tau_r$, элемент возвращается в исходное состояние покоя. Активатор производится элементами, находящимися в возбужденном состоянии. Кроме того, активатор распадается с течением времени. Эти два эффекта описываются следующим правилом

$$u_{ij}^{n+1} = gu_{ij}^n + \sum_{k,l} C(k, l) I_{i+k, j+l}^n, \quad (10.2)$$

где

$$I_{ij}^n = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \Phi_{ij}^n \leq \tau_e, \\ 0, & \text{если } \tau_e < \Phi_{ij}^n \leq \tau_e + \tau_r \text{ или } \Phi_{ij}^n = 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

Коэффициенты $C(k, l)$ определяют дальность взаимодействия. Они стремятся к нулю при больших k и l . Обычно бывает достаточным учитывать взаимодействие только между ближайшими элементами.

$$C(k, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } |k| \leq 1 \text{ и } |l| \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10.4)$$

Эта модель переходит в исходную модель Винера—Розенблюта, если положить $h = 1$ и $g = 0$.

В рамках этой модели можно наблюдать возникновение, эволюцию и взаимодействие различных структур. На рис. 10.2 можно видеть этапы эволюции спиральной волны.

§ 3. Модель Ва-Тор

Одним из недостатков модели Вольтерра—Лотки является то, что численность популяции задается действительным, а не целым числом. Понятно, что не может быть 13,45 зайцев или волков — популяция может насчитывать только целое число животных. Второй недостаток связан с тем, что мы используем дифференциальные уравнения: изменение численности популяции на одну особь

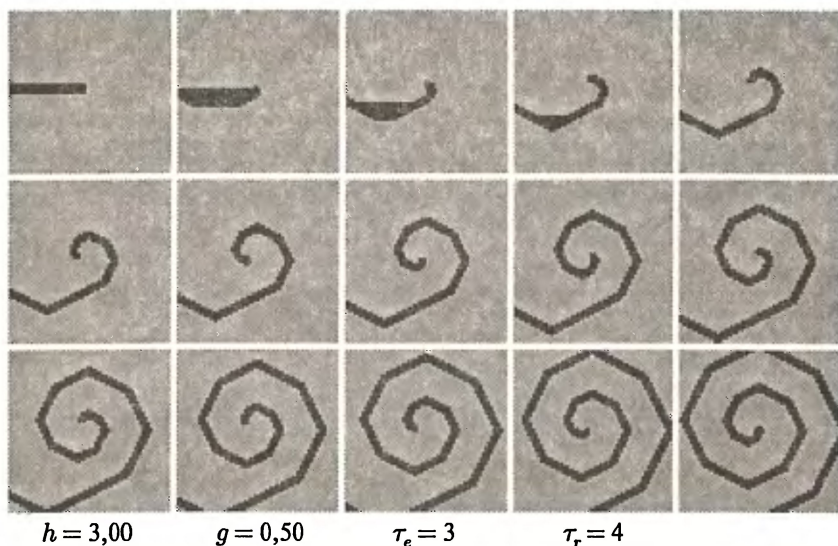


Рис. 10.2. Зарождение спиральной волны в модели Винера—Розенблута

следует рассматривать как бесконечно малое. Это предположение справедливо только в том случае, когда популяции насчитывают большое число особей, что далеко не всегда справедливо, особенно, если говорить о хищниках. Кроме того, модель никак не учитывает распределение особей в пространстве.

Одной из возможных моделей, позволяющей избавиться от этих недостатков, является модель Ва-Тор¹⁾, предложенная Дьюдни в 1984 г.²⁾ В этой модели жизненное пространство представляет собой клетчатую доску с тороидальными граничными условиями, т. е. соседом слева у крайней левой клетки является клетка из последнего столбца, а соседом сверху у клеток из первой строки — клетки из последней строки.

¹⁾ Иногда эту модель называют АКВАТОР. Оба перевода не вполне точны, ибо английское название Wa-Tor основано на игре слов. Название ассоциируется со словом water — вода.

²⁾ Подробное авторское описание модели можно найти в статье: Дьюдни А. К. Акулы и рыбы ведут экологическую войну на тороидальной планете Аква-Тор // В мире науки. 1985. № 2. С. 79–84.

Клеточный автомат задается следующим набором правил.

- Исходя из требуемой концентрации рыб и акул, они помещаются случайным образом в узлы прямоугольной сетки. Всем рыбам и акулам приписывается случайный возраст.
- На временном шаге t_n рассматривается по очереди каждая рыба. Определяется число ближайших соседних узлов, не занятых в момент времени t_{n-1} , и рыба передвигается в один из свободных узлов случайным образом. Если все четыре узла заняты, то рыба не перемещается.
- Если рыба выживает за время, кратное числу шагов $fbreed$, у рыбы появляется один потомок. Новая рыба помещается в старую позицию рыбы-родителя.
- На временном шаге t_n рассматривается по очереди каждая акула. Если все ближайшие к акуле соседние узлы не заняты в момент времени t_{n-1} , то акула передвигается в один из свободных узлов случайным образом. Если хоть в одном соседнем узле находится рыба, то акула перемещается случайным образом в один из этих узлов и поедает рыбу.
- Если за $nstarve$ шагов акула ничего не съедает, то она погибает. Если акула выживает в течение времени, кратного $sbread$ шагов, то у нее появляется потомок. Новая акула помещается в предыдущую позицию родителя.

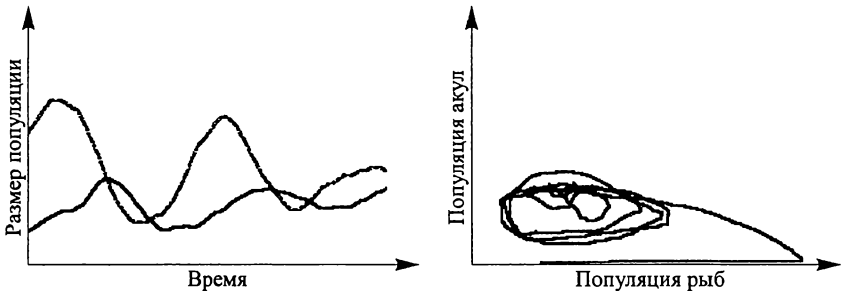


Рис. 10.3. Результаты работы модели Ва-Тор

Динамика популяций в рамках этой модели схожа с динамикой модифицированной модели Вольтерра—Лотки. Численность каждой из популяций испытывает затухающие периодические колебания, смещенные по фазе. Поскольку в данном случае численности популяции испытывают случайные колебания, то кривые не являются гладкими (рис. 10.3).

Модель Изинга

Модель Изинга является базовой моделью в физике для описания магнитных фазовых переходов. Рассмотрим кристаллическую решетку. Для простоты будем считать ее плоской и квадратной, хотя, конечно же, можно рассматривать и более сложные кристаллические решетки. В каждом узле кристаллической решетки располагается атом, обладающий собственным магнитным моментом — спином. Проекция спина на выбранную ось может принимать только значения $+1$ и -1 . Если все спины направлены в одну сторону (имеют одинаковые проекции), то решетка обладает магнитным моментом. Говорят, что образец *ферромагнитный*. Спины соседних атомов могут иметь противоположные проекции, тогда вещество называют *антиферромагнитным*. И в том, и в другом случае наблюдается дальний порядок в ориентации спинов. Дальний порядок может, однако, отсутствовать. Это произойдет, например, если нагреть ферромагнетик выше критической температуры, называемой *температурой Кюри*. Образец перейдет в немагнитное состояние, произойдет фазовый переход. Аналогичная ситуация возникает и в случае антиферромагнетиков, но критическая температура в этом случае называется *температурой Нееля*.

Почему одни вещества являются ферромагнетиками, другие — антиферромагнетиками, третьи не демонстрируют дальний магнитный порядок? Что происходит с образцом при нагревании выше критической температуры? На эти и другие вопросы помогает ответить модель Изинга. Модель была предложена в 1920 г. В. Ленцем. В 1925 г. Э. Изинг исследовал одномерный случай, в котором, кстати, фазовый переход не наблюдается. Благодаря этой работе и общий случай модели принято теперь называть моделью

Изинга, а не Ленца. Двумерный случай был исследован в 1944 г. Л. Онсагером.

Энергия системы определяется по формуле

$$W = - \sum_{i,j} I_{ij} \sigma_i \sigma_j - H \sum_k \sigma_k,$$

здесь первое слагаемое описывает энергию взаимодействия спинов, а второе — энергию системы во внешнем магнитном поле H . В первом слагаемом часто ограничиваются суммированием только по ближайшим соседям. Величина I_{ij} называется константой обменного взаимодействия и в простейшем случае одинакова для любой пары атомов. В этом случае ее можно вынести из-под знака суммирования. Если константа взаимодействия положительна, то взаимодействие называют ферромагнитным, а если отрицательна, то антиферромагнитным.

Состояние системы можно охарактеризовать с помощью намагниченности

$$M = \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

и параметра порядка

$$p = \frac{n_+ - n_-}{n},$$

где n_+ , n_- — число узлов с положительными и отрицательными спинами соответственно.

§ 1. Алгоритм Метрополиса

Для проведения моделирования с помощью модели Изинга часто используют алгоритм Метрополиса.

1. Создаем решетку со случайным распределением спинов в соответствии с заданной начальной энергией системы.
2. Случайным образом выбираем атом и переворачиваем спин. При этом энергия системы меняется на величину ΔW .

3. Если перестановка приводит к общему понижению энергии, то мы ее принимаем, если перестановка приводит к повышению энергии, то она принимается с вероятностью $\exp\{-\Delta W/(kT)\}$, где k — постоянная Больцмана, T — температура.
4. Повторяем пункты 2, 3, пока не достигнем минимума энергии.
5. Вычисляем интересующие нас величины (намагниченность и т. п.).
6. Повторяем все еще раз, но с новой начальной конфигурацией атомов.
7. Усредняем по многим опытам.

Поскольку алгоритм основан на использовании случайного выбора атомов, то он относится к группе методов Монте-Карло.

§ 2. Задача о коммивояжере

Алгоритм, сходный с алгоритмом Метрополиса, может быть использован в достаточно неожиданной области — в задаче поиска кратчайшего пути на графе. Эта задача называется *задачей о бродячем торговце* (задачей о корабейнике, задачей о коммивояжере).

Пусть имеется n городов. Некоторые из них связаны между собой дорогами различной длины. Бродячий торговец хотел бы посетить все эти города по одному разу, пройдя при этом наименьшее расстояние. Точно задача может быть решена методом полного перебора, что приводит к колоссальному объему вычислений в реальных задачах. А задачи такие возникают очень часто, особенно на транспорте. В то же самое время можно найти решение, близкое к оптимальному, используя метод Монте-Карло.

Обозначим через a некоторую последовательность посещения городов, а через $L(a)$ — соответствующую этой последовательности длину пути. Мы хотим найти такую последовательность a , при которой длина пути была бы минимальной. Будем применять для этой цели алгоритм Метрополиса, с той лишь разницей, что мы вместо переворота спинов будем менять последовательность посещения городов. Тогда второй пункт алгоритма Метрополиса будет

звучать примерно так: «В заданной последовательности посещения городов случайным образом выбираем два города и меняем их местами». Роль энергии в этом случае будет играть длина пути. Но что же такое в этом случае температура? Температура — это некоторый управляющий параметр. Первоначально он выбирается достаточно большим, а затем медленно понижается. Если при дальнейшем понижении температуры длина пути перестает меняться, то значит минимум достигнут.

Понятно, что при малом числе городов трудоемкость метода будет чрезвычайно большой. В то же время, поскольку трудоемкость обычных методов растет экспоненциально с ростом системы, этот метод становится весьма эффективным именно для больших систем.

§ 3. Распознавание образов

Но, пожалуй, самое удивительное и неожиданное применение модели Изинга связано с задачами распознавания образов. Такое применение модели предложил в 1982 г. Хопфилд. Оказалось, что ферромагнитная модель Изинга имеет много общих черт с *ассоциативной памятью*, т. е. со способностью распознавать образ по неполной или искаженной информации о нем.

Для того чтобы моделировать ассоциативную память, система должна обладать следующими свойствами.

1. Система должна состоять из большого числа n более или менее однородных элементов — нейронов, связанных между собой. В простейшем случае нейрон считают двоичным элементом. Состояние каждого из них определяется состоянием остальных элементов за некоторый предшествующий интервал времени и связями между ними.
2. Система должна обладать способностью к классификации, т. е. 2^n входным сигналам (начальным состояниям системы) должно соответствовать существенно меньшее число выходных сигналов (конечных стационарных состояний системы, аттракторов). Набор аттракторов является информацией, записанной в памяти. Переход системы от начального состоя-

ния к конечному называется процессом распознавания образа по его части, заданной входным сигналом.

3. Система должна обладать способностью к обучению, т. е. допускать добавление новых аттракторов без существенного искажения старых.
4. Работа системы должна быть устойчивой по отношению к сбоям в работе отдельных элементов и связей.

Перечисленными свойствами в значительной мере обладает уже знакомая модель Изинга. Однако, учитывая специфику рассматриваемой задачи, подобную сеть, состоящую из дискретных двоичных элементов и связей, называют *нейронной сетью*. Недостатком обычной модели Изинга является то, что при низких температурах она обладает только двумя стационарными состояниями (все спины направлены либо вверх, либо вниз). Однако, если коэффициенты обменного взаимодействия I_{ij} знакопеременные, то количество стационарных состояний существенно увеличивается. Природные объекты, обладающие такими свойствами, называются *спиновыми стеклами*. Поскольку энергия спинового стекла имеет множество локальных минимумов, то можно сказать, что система помнит набор различных образов (стабильных состояний). В зависимости от начального состояния система будет релаксировать к тому или иному конечному состоянию. Естественно, система будет переходить в ближайшее состояние с минимальной энергией. Таким образом, система способна к классификации. Задавая различные наборы I_{ij} , можно записывать в память различные образы.

Генетические алгоритмы

Если применение идей модели Изинга в задачах распознавания образов демонстрировало проникновение физических идей в биологию, то генетические алгоритмы демонстрируют обратный процесс — проникновение биологических идей в математику и технические науки. Генетические алгоритмы основываются на идеях естественного отбора и борьбы за существование и находят применение, в частности, в задачах оптимизации. Фактически, генетические алгоритмы моделируют процесс эволюции и естественного отбора в некоторой популяции, только в отличие от биологической популяции в случае генетических алгоритмов популяция состоит из чисел.

Пусть имеется некоторая функция с многочисленными локальными минимумами. Требуется найти ее глобальный минимум. При использовании обычных алгоритмов весьма вероятным исходом поиска будет достижение одного из локальных минимумов. Генетические алгоритмы позволяют найти именно глобальный минимум.

Определим основные понятия, используемые в генетических алгоритмах.

Хромосома — решение задачи, представленное в виде строки битов.

Ген — единичный бит или короткий фрагмент, представляющий некоторый элемент решения.

Аллель — 0 или 1 для каждого локуса (положения в хромосоме).

Кроссинговер — обмен участками между хромосомами родителей.

Мутация — изменение значения бита в случайно выбранном локусе.

Пригодность — критерий или функция, экстремум которой следует найти.

Генетические алгоритмы состоят из следующих шагов.

1. Генерируем случайным образом популяцию из n хромосом.
2. Вычисляем для каждой хромосомы ее пригодность.
3. Выбираем случайным образом пару хромосом (родителей). Выбор хромосомы осуществляется с вероятностью пропорциональной ее пригодности. Одна и та же хромосома может выбираться несколько раз.
4. Проводим кроссинговер двух родителей с вероятностью p_c , производя двух потомков.
5. Проводим мутацию потомков с вероятностью p_m .
6. Повторяем шаги 3–5, пока не будет сгенерировано новое поколение популяции, содержащее n хромосом.
7. Повторяем шаги 2–6, пока не будет достигнут критерий окончания процесса.

В зависимости от решаемой задачи параметры принимают значения $n = 30 - 100$, $p_c = 0,8 - 0,95$, $p_m = 0,001 - 0,01$.

В переводе на более привычный язык алгоритм сводится к следующему. Выбираем в качестве начальных приближений несколько значений. Это и есть наша популяция решений. Если мы пытаемся найти максимум некоторой функции, то естественным способом определить пригодность решения будет просто вычисление значения функции. Чем больше это значение, тем лучше полученное приближение. Критерием окончания процесса может служить превышение некоторого заранее определенного значения.

Одним из возможных подходов, обеспечивающих производство потомства с вероятностью пропорциональной пригодности, состоит в следующем. Выбираем из популяции решений 3 хромосомы и отбираем из них 2 с наибольшей пригодностью. Именно эти две хромосомы будут участвовать в производстве потомства. Затем хромосомы возвращаются в популяцию и выбор повторяется.

Если все начальные приближения близки, то кроссинговер будет менять их значения незначительно. В то же время мутации

могут затрагивать любой бит, в том числе, старший, что будет приводить к существенному изменению решения. Поскольку мутации происходят с малой вероятностью и не всегда затрагивают старшие биты, то существенное изменение решений происходит крайне редко. Основное назначение мутаций — переброс решений от одного локального минимума к другому.

Естественный отбор, т. е. отбор для генерации нового поколения лучших решений с большей вероятностью, обеспечивает сходимость процесса.

Представление решения в виде строки бит встречается часто, но не является единственно возможным. Можно применять генетические алгоритмы, используя обычное десятичное представление чисел. В этом случае алфавит будет состоять уже не из двух, а из десяти символов.

ЧАСТЬ III

ПРИЛОЖЕНИЯ

— И ты полагаешь, что можно наестся тефтелями, яблочной запеканкой с ванильным соусом, ветчиной, сыром, колбасой, солеными огурцами да двумя жалкими крохотными сардинками?

Фрекен Бок поглядела на него в упор.

— Нет, — сказала она подчеркнуто спокойным тоном.

— Но ведь есть еще и печеночный паштет.

Астрид Линдгрен. Карлсон, который живет на крыше, опять прилетел

Инструментальные средства для исследования динамических систем

Сегодня имеется целый ряд различных математических пакетов, реализующих разнообразные численные методы, а так же способных производить аналитические математические преобразования. Пожалуй, наиболее известными сегодня являются следующие пакеты: Mathematica (фирма Wolfram Research), Maple (фирма Waterloo Maple Inc.), Matlab (фирма The MathWorks), Mathcad (фирма MathSoft Inc.). В частности, эти пакеты могут быть использованы для исследования динамических систем. Описание каждого такого пакета насчитывает многие сотни страниц, рассмотреть их в рамках данного пособия просто невозможно. Предполагается, что читатель хотя бы поверхностно знаком с одним из пакетов, и приводимые ниже примеры помогут ему в исследовании динамических системы с применением известного ему математического пакета. Во всех случаях будет исследована одна и та же система — модифицированная система Вольтерра—Лотки (см. раздел 2.4).

А.1. Исследование динамической системы с использованием пакета Mathematica

Пакета Mathematica, по-видимому, является сегодня наиболее популярным в научных кругах, особенно среди теоретиков. Пакет предоставляет широкие возможности в проведении символических (аналитических) преобразований.

Для исследования динамических систем может быть использована функция численного интегрирования дифференциальных

уравнений `NDSolve` и функция для вычерчивания графиков функций, заданных в параметрическом виде, `ParametricPlot`.

Определяем параметры задачи:

$$\alpha = 0.1; \quad \beta = 0.05; \quad \gamma = 0.03; \quad \delta = 0.2; \quad \epsilon = 0.15.$$

Решаем систему дифференциальных уравнений численно с помощью функции `NDSolve`. Первые две строки задают систему дифференциальных уравнений, в третьей строке указаны начальные условия, список переменных и диапазон изменения независимой переменной, последняя строка указывает, каким именно численным методом должна быть решена система.

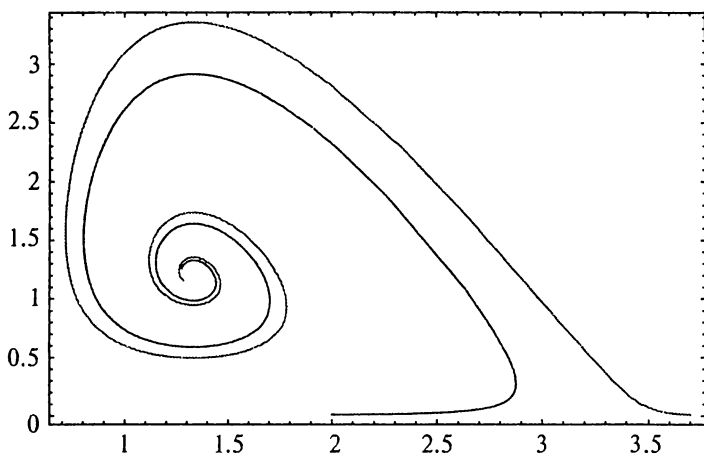
```
solution = NDSolve[{x'[t] == x[t] (alpha - beta y[t] - gamma x[t]),
y'[t] == -y[t] (delta - epsilon x[t]),
x[0] == 2, y[0] == 0.01},
{x, y}, {t, 0, 164}, Method -> RungeKutta];
```

Повторяем вычисления для других начальных условий.

```
solution1 = NDSolve[{x'[t] == x[t] (alpha - beta y[t] - gamma x[t]),
y'[t] == -y[t] (delta - epsilon x[t]), x[0] == 3.7, y[0] == 0.01},
{x, y}, {t, 0, 164}, Method -> RungeKutta];
```

С помощью функции `ParametricPlot` строим фазовый портрет системы. В первой строке задан список переменных и правила подстановки, следующие строки задают формат рисунка.

```
ParametricPlot[{x[t], y[t]}/.solution,
{x[t], y[t]}/.solution1}, {t, 0, 164},
Axes -> False, PlotRange -> All,
Frame -> True, DefaultFont -> 12,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 0]}];
```



A.2. Исследование динамической системы с использованием пакета Maple

Пакет Maple также весьма популярен в научных кругах. Кроме аналитических преобразований пакет в состоянии решать задачи численно. Характерной особенностью пакета является то, что он позволяет конвертировать документы в формат \LaTeX — стандартный формат подавляющего большинства научных издательств мирового класса. Кроме того, ряд других программных продуктов используют интегрированный символический процессор Maple. Пакет подготовки научных публикаций Scientific WorkPlace (фирма TCI Software Research) позволяет обращаться к символическому процессору Maple, производить аналитические преобразования и встраивать полученные результаты в документ. Пакет Mathcad использует встроенный процессор Maple. В пакете Matlab имеется расширение для выполнения символических операций Symbolic Math Toolbox, основанное на Maple.

Ниже приводится пример построения фазового портрета системы двух дифференциальных уравнений с помощью Maple. Для большей наглядности введен ряд дополнительных переменных, смысл которых поясняется. Вообще говоря, получить тот же самый

результат можно было бы и без использования вспомогательных переменных.

Задаем значения параметров системы:

```
> alpha:=0.1:
> beta:=0.05:
> xi:=0.03:
> delta:=0.2:
> epsilon:=0.15:
> with(DEtools):
```

Команда `with(DEtools)` означает, что Maple должен использовать функции из библиотеки `DEtools`.

Задаем первое дифференциальное уравнение

```
> first:=diff(x(t),t)=x(t)*(alpha-beta*y(t)-xi*x(t));
```

$$first := \frac{\partial}{\partial t} x(t) = x(t) (.1 - .05 y(t) - .03 x(t))$$

и второе дифференциальное уравнение

```
> second:=diff(y(t),t)=-y(t)*(delta-epsilon*x(t));
```

$$second := \frac{\partial}{\partial t} y(t) = -y(t) (.2 - .15 x(t))$$

Объединяем их в систему

```
> deqns:=[first,second]:
```

Задаем список функций

```
> vars:=[x(t),y(t)]:
```

Задаем начальные условия. Мы планируем нарисовать две фазовые траектории, поэтому создаем список из двух условий.

```
> inits:=[[x(0)=3.7,y(0)=0.01],[x(0)=2,y(0)=0.01]]:
```

Задаем диапазон изменения независимой переменной

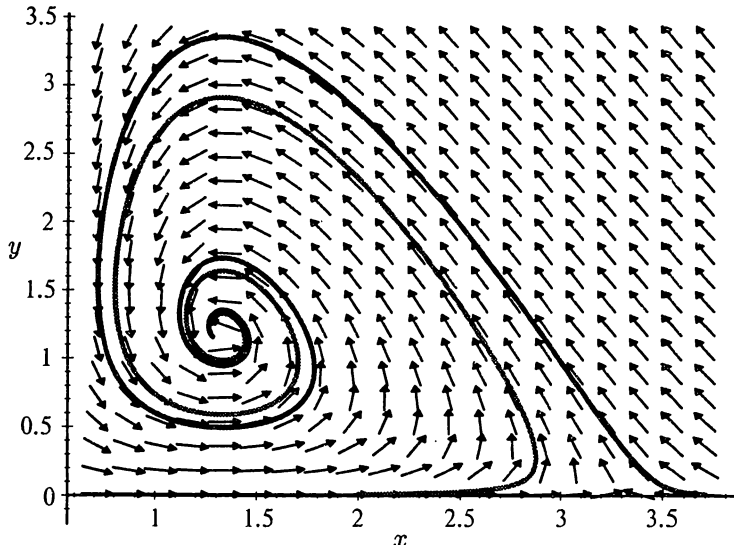
```
> trange:=t=0..164:
```

Задаем опции для графика: `linecolor` задает цвета линий, `color` — цвет стрелок, `arrows` определяет вид стрелок, `stepsize` — шаг.

```
> optns:=linecolor=[red,blue],color=black,
> arrows='MEDIUM',stepsize=.5;
```

Функция `phaseportrait` рисует фазовый портрет автономной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Параметры: первый параметр (`deqns`) задает систему дифференциальных уравнений, второй (`vars`) — список переменных, третий (`trange`) — диапазон изменения независимой переменной (в данном случае — времени t), четвертый параметр (`inits`) определяет начальные значения величин x и y , последний (`optns`) — необязательный список опций для построения фазового портрета.

```
> phaseportrait(deqns,vars,trange,inits,optns);
```



А.3. Исследование динамической системы с использованием пакета Matlab

Пакет Matlab фактически представляет собой своеобразный язык программирования высокого уровня, ориентированный на решение научных задач. Характерной особенностью пакета является то, что он позволяет сохранять документы в формате языка программирования C.

Для построения фазового портрета сначала следует создать M-файл с системой дифференциальных уравнений:

```
function dy=v1m(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(1)*(0.1-0.05*y(2)-0.03*y(1));
dy(2)=-y(2)*(0.2-0.15*y(1)).
```

Для решения системы можно использовать, например, функцию ode45, реализующую метод Рунге—Кутта. Первый параметр — имя M-файла, второй — диапазон изменения независимой переменной, третий — начальные значения. Ниже система решается для двух различных наборов начальных значений.

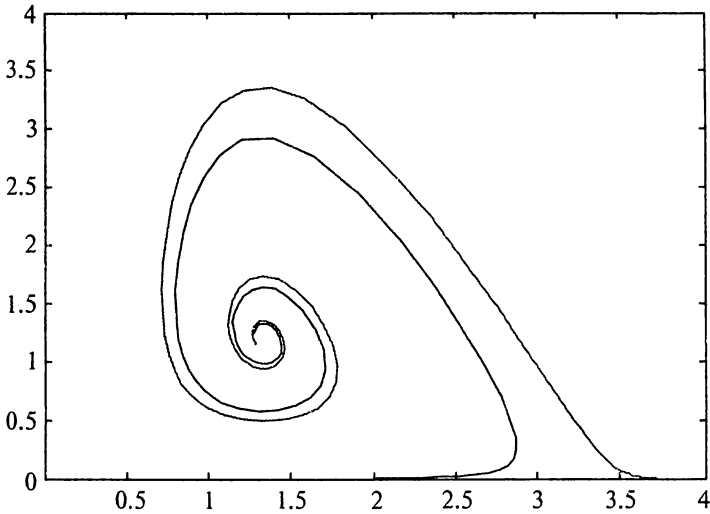
- > [T,Y]=ode45('v1m',[0 164],[2 0.01]);
- > [T,Y1]=ode45('v1m',[0 164],[3.7 0.01]);

Для построения фазового портрета можно воспользоваться функцией plot.

- > plot(Y(:,1),Y(:,2),Y1(:,1),Y1(:,2));
- > axis([0 4 0 4])

А.4. Исследование динамической системы с помощью Simulink

Simulink является одним из расширений пакета Matlab и предназначен для имитационного моделирования. Модели собираются из стандартных блоков, свойства которых можно менять.



Для построения модели модифицированную систему уравнений Вольтерра—Лотки перепишем в ином виде

$$x = \int_0^t x(\alpha - \beta y - \beta' x) dt + x(0),$$

$$y = \int_0^t -y(\gamma - \beta \delta x) dt + y(0).$$

Рассмотрим подробно, как составляется модель для первого уравнения. Видно, что переменная x получается в результате интегрирования некоторого выражения. Следовательно, модель должна содержать интегратор, постоянная интегрирования которого должна соответствовать $x(0)$ (блок Integrator1, см. рис. А.1). На выходе интегратора мы получим $x(t)$, а на вход должен поступать сигнал, соответствующий подынтегральному выражению. Подынтегральное выражение представляет произведение двух сомножителей, значит, сигнал на интегратор пойдет с блока произведение. В данном случае не имеет значение, какой из блоков Dot Product или

Cross Product мы будем использовать. На один из входов блока произведения (Dot Product) идет величина $x(t)$. Эту величину мы получаем на выходе интегратора. На второй вход блока произведения подается сумма трех величин, следовательно, необходимо использовать сумматор с 3 входами, причем знаки входов нужно заменить на $+ - -$ (блок Sum1 на рис. А.1). Одно из слагаемых представляет собой константу, следовательно, используется блок Constant. Два других слагаемых сходны и равны произведению функции на константу. Чтобы определить эти слагаемые удобно воспользоваться блоками усилителей (Gain и Gain2), которые увеличивают входной сигнал. На один из блоков пойдет сигнал x с выхода интегратора Integrator1, а на другой — y с Integrator2. Для отображения результата воспользуемся осциллографом XY Graph.

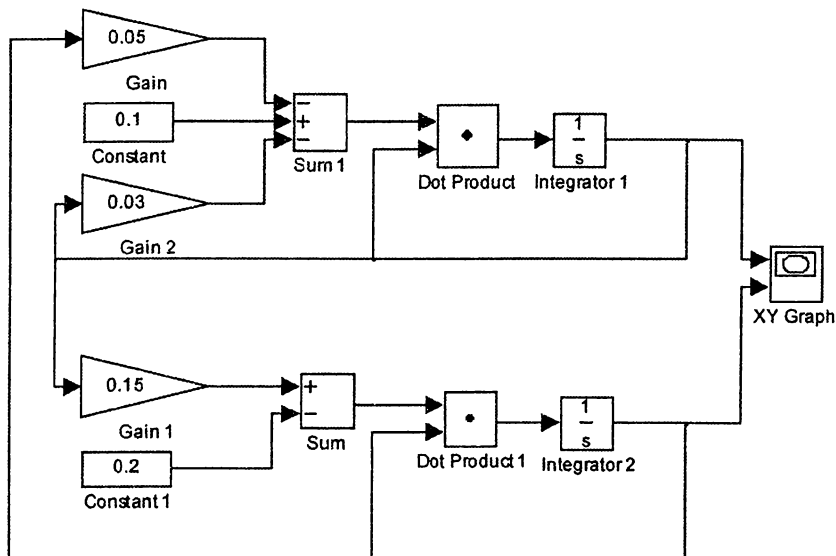
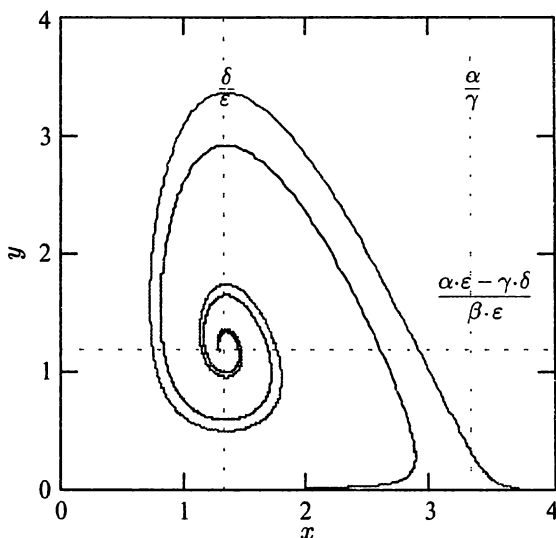


Рис. А.1. Блок-схема Simulink для модифицированной модели Вольтерра—Лотки

A.5. Исследование динамической системы с использованием пакета Mathcad

Пакет Mathcad популярен, пожалуй, более в инженерной, чем в научной среде. Характерной особенностью пакета является использование привычных стандартных математических обозначений, т. е. документ на экране выглядит точно так же обычный математический расчет. Для использования пакета не требуется изучать какую-либо систему команд, как, например, в случае пакетов Mathematica или Maple. Пакет ориентирован в первую очередь на проведение численных расчетов, но имеет встроенный символический процессор Maple, что позволяет выполнять аналитические преобразования. В последних версиях предусмотрена возможность создавать связи документов Mathcad с документами Matlab. В отличие от упомянутых выше пакетов, Mathcad является средой визуального программирования, т. е. не требует знания специфического набора команд.



Определяем параметры системы, время и количество точек, в которых будет искаться решение:

$$\alpha := 0.1 \quad \delta := 0.2 \quad n := 800 \quad i := 0..n$$

$$\beta := 0.05 \quad \varepsilon := 0.15 \quad \gamma := 0.03 \quad t := 164$$

Задаем начальные условия

$$y := \begin{pmatrix} 3.7 \\ 0.01 \end{pmatrix} \quad y1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Задаем систему дифференциальных уравнений

$$D(t, y) := \begin{bmatrix} y_0 \cdot (\alpha - \beta \cdot y_1 - \gamma \cdot y_0) \\ -y_1 \cdot (\delta - \varepsilon \cdot y_0) \end{bmatrix}$$

Решаем систему с помощью функции `rkfixed`, реализующую метод Рунге-Кутты. Первый параметр - начальные условия, второй и третий - диапазон изменения времени, последний - функция, задающая систему уравнений.

$$z := \text{rkfixed}(y, 0, t, n, D) \quad z1 := \text{rkfixed}(y1, 0, t, n, D)$$

Генерация случайных чисел на компьютере

При проведении компьютерного моделирования часто возникает потребность в случайных числах. Обычно для производства случайных чисел используют некоторый детерминированный алгоритм, в результате работы которого получается последовательность чисел со свойствами, близкими к случайному распределению. В отличие от истинно случайных чисел, случайные числа такого рода называют *псевдослучайными*. Последовательность псевдослучайных чисел является периодической, т. е. в ней можно выделить регулярно повторяющиеся фрагменты. Чаще всего генерируют последовательность равномерно распределенных чисел. Такая последовательность может быть преобразована в другое распределение, например, в нормальное.

К псевдослучайным числам предъявляют ряд требований.

1. Псевдослучайные числа должны быть равномерно распределены на некотором интервале.
2. Между ними не должно обнаруживаться никаких корреляций.
3. Период последовательности должен быть большой.
4. Последовательность должна быть воспроизводимой.

Хотя в большинстве систем имеются встроенные генераторы случайных чисел, далеко не всегда они удовлетворяют перечисленным требованиям. В первую очередь это касается периода последовательности и отсутствия корреляций. Например, компьютерное моделирование движения броуновской частицы с использованием

встроенных генераторов иногда приводит к странным результатам. Может оказаться, что частица совершает периодическое движение или никогда не попадает в некоторые области пространства. В связи с этим в серьезных работах по компьютерному моделированию используют более надежные генераторы.

Существует целый ряд различных алгоритмов для генерации псевдослучайных чисел. С некоторыми из них мы сейчас познакомимся.

В.1. Линейный конгруэнтный генератор

Линейный конгруэнтный генератор используется во многих системах и порождает последовательность целых чисел, равномерно распределенных на интервале от 0 до $m - 1$, используя следующее рекуррентное соотношение

$$R_{i+1} = aR_i + c \pmod{m}, \quad (\text{В.1})$$

где *модуль* m , *множитель* a и *инкремент* c — положительные целые числа. Период последовательности, порождаемой соотношением (В.1) не может превышать m . При правильном выборе m , a и c в последовательности присутствуют все числа от 0 до $m - 1$ при любом выборе начального значения последовательности R_0 .

Достоинствами генератора является то, что он работает очень быстро, поскольку требует выполнения только нескольких операций. Один недостаток этого генератора заключается в том, что период последовательности определяется количеством байтов, отводимых для целых чисел в данной системе. Обычно для хранения целых чисел используется 2 байта, поэтому период последовательности составит 32767, что чрезвычайно мало для решения реальных задач. Другой недостаток состоит в том, что сгенерированные числа коррелированы между собой. Если рассматривать k последовательных случайных чисел как координаты точек в k -мерном пространстве, то все такие точки будут лежать на некоторых плоскостях, а не заполнят равномерно весь объем.

В.2. Мультипликативный конгруэнтный алгоритм

Этот алгоритм был предложен Льюисом, Гудменом, Миллером в 1969 г. Последовательность случайных чисел задается следующим рекуррентным соотношением

$$R_{i+1} = aR_i \pmod{m}, \quad (\text{B.2})$$

где $a = 7^5 = 16807$, $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$. Поскольку на 32-разрядных компьютерах вычисления по формуле (B.2) не могут быть выполнены непосредственно, то для вычислений используется следующая формула

$$az \pmod{m} = \begin{cases} a(z \pmod{q}) - r[z/q], & \text{если выражение} > 0, \\ a(z \pmod{q}) - r[z/q] + m & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $q = 127773$, $r = 2836$, а z — положительное целое число. Квадратные скобки означают целую часть числа. Генератор имеет период $2^{31} - 2 \approx 10^9$.

Ниже приводится пример реализации алгоритма на языке C.

```
#define IA 16807
#define IM 2147483647
#define AM (1.0/IM)
#define IQ 127773
#define IR 2836
#define MASK 123459876

float mcgrand(long *idum)
{
    long k;
    float ans;
    *idum ^= MASK;
    k=(*idum)/IQ;
    *idum=IA*( *idum-k*IQ)-IR*k;
    if (*idum ! 0) *idum += IM;
    ans=AM*( *idum);
```

```
*idum ^= MASK;
return ans;
}
```

В.3. Генератор на основе сдвига регистра

Этот генератор использует следующую идею. Поскольку любое число в компьютере представлено в виде последовательности битов, то получить новое число можно изменив каким-либо образом биты имеющегося числа. В простейшем случае можно просто сдвинуть все биты влево. Тогда старший бит пропадет, а освободившийся младший бит можно заполнить нулем. Повторяя эту операцию можно получить 2^n чисел, где n — число битов, отводимых для хранения числа. Такая операция называется *сдвиг Бернулли* и задается правилом $R_{i+1} = 2R_i \pmod{1}$.

Можно использовать и более сложные правила преобразования битов. Пусть имеется последовательность битов, пронумерованных от 1 до n и имеющих значения a_1, a_2, \dots, a_n . Будем вычислять значение a_0 по правилу

$$a_0 = a_{18} \wedge a_5 \wedge a_2 \wedge a_1,$$

где \wedge — XOR — исключающее ИЛИ. После этого сдвинем все биты на один, так что a_0 станет a_1 , a_1 станет a_2 , a_n пропадет.

Ниже приводится пример реализации алгоритма на языке C.

```
int srrandom(unsigned long *iseed)
{
    unsigned long newbit;
    newbit = (*iseed >> 17) & 1 ^
    (*iseed >> 4) & 1 ^ (*iseed >> 1) & 1 ^ (*iseed & 1);
    *iseed = (*iseed << 1) | newbit;
    return (int) newbit;
}
```

Заключение

*Когда ж закончил я рассказ,
То кое-кто спросил: «И все?
Ты говорил тут целый час,
А рассказал ни то ни се!..»*

Алан Александр Милн.
Винни-Пух и все, все, все...

Было бы искренне жаль, если после прочтения этой книги у читателя возникнет желание повторить слова, вынесенные в эпиграф. Хочется верить, что познакомившись с математическим и компьютерным моделированием как учебной дисциплиной, читатель начнет осваивать математическое и компьютерное моделирование как область науки, способную дать ключ к пониманию многих проблем, возникающих в окружающем нас мире.

Много дополнительной информации о применении методов математического и компьютерного моделирования в естественных науках можно найти в книгах, приведенных в списке литературы. Уровень изложения материала в этих книгах таков, что они вполне могут быть использованы в учебном процессе на начальном этапе знакомства с предметом.

В последние годы вышло много книг, рассказывающих о применении методов математического и компьютерного моделирования в естествознании, экономике, демографии и других науках. Часть этих книг приводится в разделе Дополнительная литература. Для понимания этих книг требуется определенная предварительная подготовка. Их можно рекомендовать тем, кто захочет получить более глубокие знания о предмете и использовать полученные сведения на практике.

Литература

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями: Пер. с франц. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. (Классики естествознания.)
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.
3. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
4. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд. 3-е. Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1970.
5. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. Изд. 2-е, доп. М.: УРСС, 2003.
6. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
7. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн: Учебное пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.
8. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
9. *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике. В 2-х частях: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
10. *Федер Е.* Фракталы: Пер. с англ. М.: Мир, 1991.

Дополнительная литература

1. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. Изд. 4-е. М.: УРСС, 2004.
2. *Малинецкий Г. Г.* Математические основы синергетики: Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Изд. 4-е. М.: УРСС, 2004.
3. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. Изд. 2-е. М.: УРСС, 2002.

4. Дулов В. Г., Цибаров В. А. Математическое моделирование в современном естествознании: Учеб. пособие. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2001.
5. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой: Лекции сороковского профессора: Учеб. пособие. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
6. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. М.: Постмаркет, 2001.
7. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: ФАЗИС: ВЦ РАН, 2000. (Математическое моделирование. Вып. 1.)
8. Павловский Ю. Н. Имитационные модели и системы. М.: ФАЗИС: ВЦ РАН, 2000. (Математическое моделирование. Вып. 2.)
9. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001.
10. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб.: Наука, 2001.

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы.
Плохотников К. Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.
Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей.
Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем.
Киселева И. А. Коммерческие банки: модели и информационные технологии.
Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания.
Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление.
Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика.
Драгалин А. Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ.
Бахтияров К. И. Логика с точки зрения информатики.
Гамов Г., Стерн М. Занимательные задачи.
Клини С. Математическая логика.
Софиева Ю. Н., Цирлин А. М. Введение в задачи и методы условной оптимизации.
Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи.
Ковалев М. М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование).
Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации.
Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве.
Оуэн Г. Теория игр.
Шикин Е. В. От игр к играм. Математическое введение.
Смоляков Э. Р. Теория конфликтных равновесий.
Оре О. Графы и их применение.
Харари Ф. Теория графов.
Перминов В. Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства.
Гастев Ю. А. Гомоморфизмы и модели (логико-алгебраич. аспекты моделирования).
Тьюринг А. Может ли машина мыслить?
Бирюков Б. В., Тростников В. Н. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики.
Шмелев В. В. Базисные методы решения задач линейного программирования.
Кронрод А. С. Беседы о программировании.
Ворожцов А. В. Путь в современную информатику.
Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (095) 135-42-16, 135-42-46
или электронной почтой URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в Интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Издательство УРСС

Научная и учебная
литература



Представляет Вам свои лучшие книги:

- Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Т. 1–3.
Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.
Крыжановский Д. А. Изопериметры. Свойства геометрических фигур.
Понtryгин Л. С. Основы комбинаторной топологии.
Клейн Ф. Неевклидова геометрия.
Клейн Ф. Высшая геометрия.
Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.
Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство.
Белько И. В. Слоеные группойды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии.
Смирнов Ю. М. Курс аналитической геометрии.
Яглом И. М. О комбинаторной геометрии.
Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии.

Дифференциальные и интегральные уравнения

- Филлипов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений.
Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений.
Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения.
Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения.
Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
Амелькин В. В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения.
Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях.
Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.
Лефшиц С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.
Кузьмина Р. П. Асимптотические методы для обыкновенных диф. уравнений.
Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.
Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.
Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем.
Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.
Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.

Теория чисел

- Вейль А.* Основы теории чисел.
Вейль Г. Алгебраическая теория чисел.
Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел.
Хинчин А. Я. Цепные дроби.
Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел.
Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм.
Жуков А. В. Вездесущее число «пи».
Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России.
Ожигова Е. П. Что такое теория чисел.
Оре О. Приглашение в теорию чисел.

Издательство УРСС



Представляет Вам свои лучшие книги:

Учебники и задачки по математике

Босс В. Лекции по математике: анализ.

Босс В. Лекции по математике: дифференциальные уравнения.

Болярчук А. К. и др. Справочное пособие по высшей математике (Антидеמידович). Т. 1–5.

Краснов М. Л. и др. Вся высшая математика. Т. 1–6.

Краснов М. Л. и др. Сборники задач «Вся высшая математика» с подробн. решениями.

Избранные задачи по математике из журнала «АММ». Под ред. *Алексеева В. М.*

Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение (с решениями).

Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

Л. С. Понтрягин: Серия «Знакомство с высшей математикой»

Метод координат.

Анализ бесконечно малых.

Алгебра.

Дифференциальные уравнения и их приложения.

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Трубецков Д. И. Введение в синергетику. В 2 кн.: Колебания и волны; Хаос и структуры.

Арнольд В. И. Теория катастроф.

Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики.

Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.

Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего.

Хакен Г. Информация и самоорганизация.

Чернавский Д. С. Синергетика и информация (динамическая теория информации).

Баранцев Р. Г. Синергетика в современном естествознании.

Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика

и синергетика: путь к целостной простоте.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.

Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. Введение.

Пригожин И., Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.

**Издательство
УРСС**

**(095) 135-42-46,
(095) 135-42-16,
URSS@URSS.ru**

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (095) 925-2457)

«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (095) 203-8242)

«Москва» (м. Охотный ряд, ул. Тверская, 8. Тел. (095) 229-7355)

«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (095) 238-5083, 238-1144)

«Дом деловой книги» (м. Пролетарская, ул. Марксистская, 9. Тел. (095) 270-5421)

«Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (095) 939-4713)

«У Кентавра» (РГТУ) (м. Новослободская, ул. Чайнова, 15. Тел. (095) 973-4301)

«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 311-3954)

Дифференциальные модели

- Качественная теория динамических систем
- Динамика биологических популяций
- Колебательные процессы в химии
- Предельные циклы и автоколебания
- Самоорганизация и образование структур
- Фракталы
- Хаотическое поведение динамических систем

Стохастические и детерминистические модели

- Теория перколяции
- Моделирование роста дендритов
- Клеточные автоматы
- Модель Изинга
- Генетические алгоритмы

Приложение

- Инструментальные средства для исследования динамических систем
- Генерация случайных чисел на компьютере

2770 ID 23861



ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46



Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>